Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2012-01-11

1. $\mathbf{X}$ är ju symmetrisk och definieras av tre element. Låt $\alpha = x_{1,1}$, $\beta = x_{1,2} = x_{2,1}$ och $\gamma = x_{2,2}$. Vi har då:

$$\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha^2+\beta^2+2\alpha & \alpha\beta+\beta\gamma+2\beta \\ \alpha\beta+\beta\gamma+2\beta & \beta^2+\gamma^2+2\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+\beta^2+2\alpha = 1 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+2\beta = 1 \\ \beta^2+\gamma^2+2\gamma = 1 \end{cases}$$

Så Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k+1} \\ \beta_{k+1} \\ \gamma_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\alpha_k+2 & 2\beta_k & 0 \\ \beta_k & \alpha_k+\gamma_k+2 & \beta_k \\ 0 & 2\beta_k & 2\gamma_k+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_k^2+\beta_k^2+2\alpha_k-1 \\ \alpha_k\beta_k+\beta_k\gamma_k+2\beta_k-1 \\ \beta_k^2+\gamma_k^2+2\gamma_k-1 \end{bmatrix}$$

2. Vi använder Greens formel, men eftersom kurvan inte är sluten så får vi sluta kurvan och sedan subtrahera kurvintegralen över den kurva vi lagt till. Jag har valt att lägga till det räta linjesegmentet, σ, från $(-1,0)$ till $(1,0)$, så att $\gamma+\sigma$ får positiv orientering. Så, med D som halvcirkelskivan där $y \ge 0$ får vi:

$$\int_{\gamma+\sigma} e^x \sin y + 2y + 3\,dx + e^x \cos y + 3x\,dy = \iint_D e^x \cos y + 3 - (e^x \cos y + 2)\,dxdy = \iint_D 1\,dxdy = \pi/2 \text{ (arean)}$$

Nu till kurvintegralen över σ som parametriseras enligt $t \to (t,0)$, $-1 \le t \le 1$, så att

$$\int_\sigma e^x \sin y + 2y + 3\ dx + e^x \cos y + 3x\ dy = \int_{-1}^{1} 3 + 0\ dt = 6$$

Så den sökta kurvintegralens värde är $\pi/2 - 6$.

3. Tangentplanet i punkten $(a, b, f(a,b))$ ges av

$$z = a^2 + 2b^2 + 2a(x-a) + 4b(y-b)$$

Vi sätter in punkterna på linjen i ovanstående ekvation och får

$$3 + 2t = a^2 + 2b^2 + 2a(2+t-a) + 4b(-1+t-b)$$

Detta skall gälla för **alla** reella t, vilket leder till ekvationerna

$$3 = a^2 + 2b^2 + 4a - 2a^2 - 4b - 4b^2 \quad \text{och} \quad 2 = 2a + 4b$$

eller efter förenkling

$$3 = -a^2 - 2b^2 + 4a - 4b \quad \text{och} \quad 1 = a + 2b$$

Lös ut $a = 1 - 2b$ och sätt in i den första ekvationen, vilket ger $6b^2 + 8b = 0$ så att $b = 0$ eller $b = -4/3$. Den andra ekvationen ger värdena på a. Svar: de två lösningarna är $(1,0)$ samt $(11/3, -4/3)$.

4. De stationära punkterna är lösningarna till $\operatorname{grad} f(x,y) = \mathbf{0}$. Systemet blir $2x(y+1) = 0$, $x^2 + 2y = 0$. Den första ekvationen har lösningarna $x = 0$ eller $y = -1$. $x = 0$ i den andra ekvationen ger $y = 0$ och $y = -1$ i den andra ekvationen ger $x = \pm\sqrt{2}$, så de stationära punkterna är $(0,0)$, $(-\sqrt{2}, -1)$ och $(\sqrt{2}, -1)$.

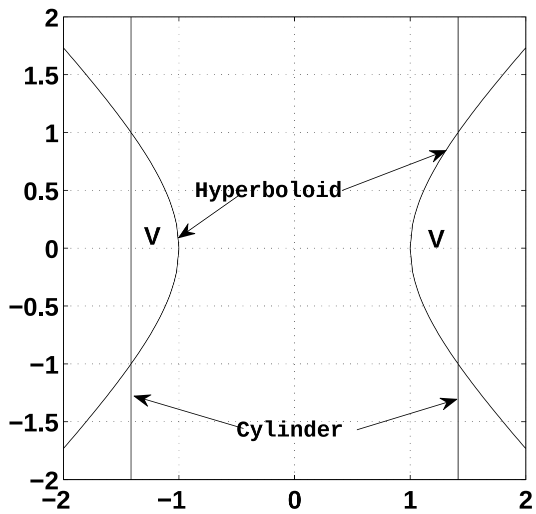
För karaktären studerar vi den kvadratiska formen $Q(h,k) = f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2$, där (a,b) är en av de stationära punkterna. Så för vår funktion: $Q(h,k) = 2(b+1)h^2 + 4ahk + 2k^2$. Eftersom vi endast är intresserade av tecken kan vi studera $Q(h,k) = (b+1)h^2 + 2ahk + k^2$ i stället. Nu till de tre punkterna:

- $(a,b) = (0,0)$: $Q(h,k) = h^2 + k^2$, som är positivt definit (ty kvadratsumma, som är noll precis då $h = k = 0$). Så, $(0,0)$ är ett strängt lokalt minimum.

- $(a, b) = (-\sqrt{2}, -1)$: $Q(h, k) = -2\sqrt{2}hk + k^2$, som är indefinit ty, $Q(1, 1) = -2\sqrt{2} + 1 < 0$ och $Q(0, 1) = 1 > 0$. Sadelpunkt.
- $(a, b) = (\sqrt{2}, -1)$: $Q(h, k) = 2\sqrt{2}hk + k^2$, som är indefinit ty, $Q(-1, 1) = -2\sqrt{2} + 1 < 0$ och $Q(0, 1) = 1 > 0$. Sadelpunkt.

5. Vi studerar ytornas ränder först. $x^2 + y^2 = 2$ är en cirkulär cylinder, med radie $\sqrt{2}$ och z-axeln som symmetriaxel. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ är en enmantlad hyberboloid där nivåkurvorna, $z =$ konstant, utgörs av cirklar.

   Den volym som söks ligger inuti (mot z-axeln) cylindern men utanför (från z-axeln) hyberboloiden. Största utsträckningen i z-led bestäms av skärningen mellan de två ytorna, dvs. när $x^2 + y^2 = 2$ så att (insatt i hyberboloidens ekvation) $2 - z^2 = 1$ så att $|z| = 1$. Här en bild som visar ett snitt i xz-planet. Eftersom ytorna är rotationssymmetriska kring z-axeln räcker det med en 2D-bild. **V** markerar den sökta volymen.



   Eftersom kroppen är symmetrisk med avseende på xy-planet kan vi skriva volymen som:

$$V = 2 \iint_D \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\, dxdy$$

   där $D = \{\, (x, y) \,|\, 1 \le x^2 + y^2 \le 2 \,\}$. Vi inför polära koordinater, $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ och $1 \le r \le \sqrt{2}$. Funktionaldeterminanten är r varför volymen blir

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{r^2 - 1}\, r\, dr\, d\varphi = 4\pi \left[\frac{(r^2 - 1)^{3/2}}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} = 4\pi/3$$

6. Låt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ så att $u(x, y) = f(r(x, y))$. Vi deriverar:

$$u'_x = f'(r)\, r'_x = f'(r)x/\sqrt{x^2 + y^2}$$

   Nu blir det derivatan av en produkt (där $f'(r)$ är den första faktorn):

$$u''_{xx} = f''(r) r'_x \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + f'(r)\, \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}^2} = f''(r) \frac{x^2}{x^2 + y^2} + f'(r)\, \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}$$

Pga symmetri blir

$$u''_{yy} = f''(r)\frac{y^2}{x^2+y^2} + f'(r)\,\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

så att

$$u''_{xx} + u''_{yy} + c^2 f(r) = f''(r) + \frac{f'(r)}{\sqrt{x^2+y^2}} + c^2 f(r) = f''(r) + \frac{f'(r)}{r} + c^2 f(r)$$

7. Gränsvärdet i a) existerar och är ett. Från formelbladet:

$$\frac{\sin(x^2-y^2+x-y)}{x-y} = \frac{\sin(x^2-y^2)\cos(x-y)+\cos(x^2-y^2)\sin(x-y)}{x-y} =$$

$$\underbrace{(x+y)\cos(x-y)}_{\to 0\cdot 1}\underbrace{\frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y^2}}_{\to 1} + \underbrace{\cos(x^2-y^2)}_{\to 1}\underbrace{\frac{\sin(x-y)}{x-y}}_{\to 1} \to 1$$

där jag utnyttjat att $x+y$ och cos är kontinuerliga (så gränsvärdena lika med funktionsvärdena) och sinus-uttrycken svarar mot standardgränsvärden (inför $t = x^2-y^2$ respektive $t = x-y$). När jag förlänger med $x+y$ får inte detta vara noll (ger divison med noll), men skulle $x+y=0$ så är ändå $\sin(x^2-y^2)=0$.

Gränsvärdet i b) existerar inte. Tag $x \neq 0, y = 0$

$$\frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y} = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \to 1,\ x \to 0$$

Tag nu $x = 0, y \neq 0$

$$\frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y} = \frac{\sin(-y^2)}{-y} = y\,\frac{\sin(y^2)}{y^2} \to 0\cdot 1 = 0,\ y \to 0$$

Olika vägar mot origo kan alltså ge olika gränsvärden, varför gränsvärdet inte existerar.

8. a) Låt halvkotet ha radien r och låt konens höjd vara h. Volymen blir

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi r^3}{3} + \frac{\pi r^2 h}{3}$$

För att räkna ut rånets area kan vi veckla ut rånet. Det utgör då en del av en cirkelskiva med radie $\sqrt{r^2+h^2}$. Rånets area erhålles genom att ta båglängden, för det utvecklade rånet, delat med omkretsen för den stora cirkeln, alltså:

$$A = \frac{2\pi r}{2\pi\sqrt{r^2+h^2}}\,\pi\left(\sqrt{r^2+h^2}\right)^2 = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$$

Vi använder ett ickelinjärt likhetsbivillkor för arean (det finns ingen anledning att använda mindre än $0.011\,\mathrm{m}^2$). Bivillkoret på standardform lyder $\pi r\sqrt{r^2+h^2} - 0.011 = 0$.

Villkoret på vinkeln kan skrivas $r/h \leq \tan 20°$ eller, på standardform, $r - h\tan 20° \leq 0$ (ett linjärt olikhetsbivillkor).
Rimliga startgissningar på r och h kan vi få genom att sätta $r = h$ i uttrycket för arean. Det ger $h = r \approx \sqrt{A/(\sqrt{2}\pi)}$.

b) Vi placerar (r, h) i vektorn w. Här följer koden:

```
function glass
A   = [1 -tan(pi * 20 / 180)];
B   = 0;
Aeq = [];
Beq = [];
LB  = zeros(2, 1);
UB  = [];

w0 = ones(2, 1) * sqrt(0.011 / (sqrt(2) * pi));  % startgissning
w  = fmincon(@obj_fun, w0, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun);

r = w(1)
h = w(2)
volym = -obj_fun(w)

function val = obj_fun(w)
r = w(1);
h = w(2);
val = -pi * r^2 * (2 * r + h) / 3;

function [in_eq, eq] = constr_fun(w)
r = w(1);
h = w(2);
in_eq = [];
eq    = pi * r * sqrt(r^2 + h^2) - 0.011;
```