Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2011-10-20

1. Systemet blir $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$, dvs.

$$\begin{aligned} e^x + xe^x + \sin(2+y) + e^y \sin(x-3) &= 0 \\ x\cos(2+y) - e^y\cos(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

så att Newtons metod blir

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} e_k^x + x_k e^{x_k} + \sin(2+y_k) + e^{y_k}\sin(x_k-3) \\ x_k\cos(2+y_k) - e^{y_k}\cos(x_k-3) \end{bmatrix}$$

där

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2e^{x_k} + x_k e^{x_k} + e_k^y \cos(x_k-3) & \cos(2+y_k) + e^{y_k}\sin(x_k-3) \\ \cos(2+y_k) + e^{y_k}\sin(x_k-3) & -x_k\sin(2+y_k) - e^{y_k}\cos(x_k-3) \end{bmatrix}$$

2. Vi parametriserar γ, $t \to (t, t^2),\ 0 \le t \le 1$.

$$\int_0^1 (t^2e^t+t^4)\cdot 1 + e^t\cdot 2t\,dt = [t^2e^t+2te^t+t^5/5]_0^1 - \int_0^1 2te^t+2e^t\,dt = 3e+1/5-\left([2te^t+2e^t]_0^1 - \int_0^1 2e^t\,dt\right) =$$

$$3e+1/5-(4e-1)+[2e^t]_0^1 = -e+6/5+2e-1 = e+1/5$$

Alternativt kan man se att derivatan av t^2e^t är $t^2e^t + 2te^t$.

3. Om φ betecknar vinkeln mellan en normalvektor till planet och z-axeln, så söker vi (x,y) där $\varphi = \pi/2 - \pi/6 = \pi/3$. En uppåtriktad normalvektor till tangentplanet är $[-f'_x(x,y), -f'_y(x,y), 1]$, så

$$\cos\varphi = \frac{[-f'_x(x,y), -f'_y(x,y), 1]\cdot[0,0,1]}{|\,[-f'_x(x,y), -f'_y(x,y), 1]\,|}$$

Eftersom $\cos(\pi/3) = 1/2$ får vi

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+(f'_x(x,y))^2+(f'_y(x,y))^2}} \quad \text{eller} \quad 1+(f'_x(x,y))^2+(f'_y(x,y))^2 = 4$$

Eftersom $f'_x = 2x$ och $f'_y = 4y$ får vi slutligen $(4/3)x^2 + (16/3)y^2 = 1$, en ellips.

4. Området utgörs av den del av en fylld ellipsoid som ligger i första oktanten. Mängden är kompakt och eftersom funktionen är kontinuerlig, så existerar största och minsta värde.

Vi undersöker först inre punkter där $\nabla f = \mathbf{0}$, så $[yz, xz, xy] = [0,0,0]$. Detta gäller bara om två av x, y, z är noll vilket innebär att punkterna ligger på en koordinataxel (som utgör en del av randen).

Nu till randen och då först koordinatplanen, där $f(x,y,z)$ blir noll. Slutligen tar vi ellipsoiden, $g(x,y,z) = 0$ med $g(x,y,z) = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1$, där x, y, z är ickenegativa.

Vi använder Lagrange-tekniken, $\nabla f = \lambda\,\nabla g$:

$$[yz, xz, xy] = 2\lambda[x/a^2, y/b^2, z/c^2]$$

vilket leder (multiplicera med x, y respektive z) att $xyz = 2\lambda x^2/a^2 = 2\lambda y^2/b^2 = 2\lambda z^2/c^2$. Om $\lambda = 0$ så ligger (x,y,z) på ett koordinatplan. Antag $\lambda \neq 0$ och sätt $k = xyz/(2\lambda)$. Då gäller att $x^2/a^2 = y^2/b^2 = z^2/c^2 = k$, vilket medför (via bivillkoret) att $3k = 1$, så att $x = a/\sqrt{3}$, $y = b/\sqrt{3}$ och $z = c/\sqrt{3}$. f:s värde i denna punkt är $abc/(3\sqrt{3})$.
Svar: minsta värdet är 0, största värdet är $abc/(3\sqrt{3})$.

5. Vi bestämmer skärningskurvan i x-y-planet genom att sätta z-värdena lika:

$$-x^2/2-(2/3)y^2+2x+4=x^2/2+y^2/3+4y \Leftrightarrow x^2-2x+y^2+4y=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=9$$

Integrationsområdet ges av $D=\{\ (x,y)\ :\ (x-1)^2+(y+2)^2\le 3^2,\ x\ge 1\ \}$. Vi inför elliptisk-polära koordinater: $x=1+r\cos\varphi,\ y=-2+r\sin\varphi,\ 0\le r\le 3,\ -\pi/2\le\varphi\le\pi/2$, där funktionaldeterminanten blir r. Volymen kan alltså skrivas:

$$\iint_D -x^2/2-(2/3)y^2+2x+4-(x^2/2+y^2/3+4y)\ dxdy=\iint_D 9-((x-1)^2+(y+2)^2)\ dxdy=$$

$$\int_0^3\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(9-r^2)r\ d\varphi\right)\ dr=\pi\int_0^3 9r-r^3\ dr=\pi\left[9r^2/2-r^4/4\right]_0^3=81\pi/4$$

6. Vi deriverar $u(s(x,y),t(x,y))$ med avseende på x och y och använder $s'_x=1, s'_y=1, t'_x=1, t'_y=-1$:

$$u'_x=u'_s s'_x+u'_t t'_x=u'_s\cdot 1+u'_t\cdot 1=u'_s+u'_t$$
$$u'_y=u'_s s'_y+u'_t t'_y=u'_s\cdot 1+u'_t\cdot(-1)=u'_s-u'_t$$
$$u''_{xx}=u''_{ss}s'_x+u''_{st}t'_x+u''_{ts}s'_x+u''_{tt}t'_x=u''_{ss}+2u''_{st}+u''_{tt}$$
$$u''_{xy}=u''_{ss}s'_y+u''_{st}t'_y+u''_{ts}s'_y+u''_{tt}t'_y=u''_{ss}-u''_{tt}$$
$$u''_{yy}=u''_{ss}s'_y+u''_{st}t'_y-u''_{ts}s'_y-u''_{tt}t'_y=u''_{ss}-2u''_{ts}+u''_{tt}$$

Detta i DE ger $u''_{ss}+2u''_{st}+u''_{tt}-2(u''_{ss}-u''_{tt})+u''_{ss}-2u''_{ts}+u''_{tt}=4u''_{tt}$ eller $u''_{tt}=0$, så $u'_t=g(s)$ och $u=tg(s)+h(s)$ där g och h är godtyckliga deriverbara funktioner av en variabel.
Lösningen är således $u(x,y)=(x-y)g(x+y)+h(x+y)$.

7. Gränsvärdet i a) existerar. Inför $t=x^2+y^2$ (eller polära koordinater), då har vi standardgränsvärdet

$$\frac{e^t-1}{t}\to 1, t\to 0$$

Gränsvärdet i b) existerar inte. Tag $x\ne 0, y=0$

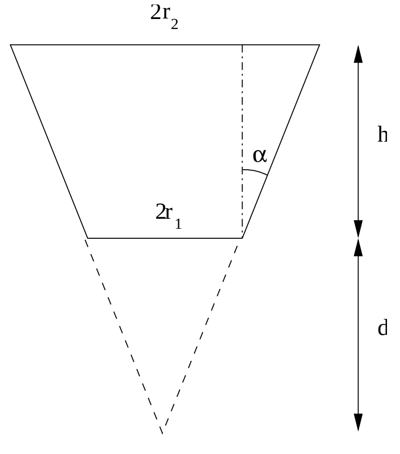
$$\frac{e^{(x^2+y^3)}-1}{x^2+y^2}=\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\to 1, x\to 0$$

Tag nu $x=0, y\ne 0$

$$\frac{e^{(x^2+y^3)}-1}{x^2+y^2}=\frac{e^{y^3}-1}{y^2}=y\cdot\frac{e^{y^3}-1}{y^3}\to 0\cdot 1=0, y\to 0$$

Olika vägar mot origo kan alltså ge olika gränsvärden, varför gränsvärdet inte existerar.

8. a) Volymen hos en **icke** trunkerad kon är ju $\pi r^2h/3$, där h är höjden och där r är radien i cirkelskivan. Nu till den trunkerade konen.



Låt cirkelskivorna i badbaljan (botten och lock) ha radierna r_1 respektive r_2 och låt höjden vara h. Det gäller (likformiga trianglar) $(d+h)/r_2 = d/r_1$ så att $d = hr_1/(r_2 - r_1), r_1 \neq r_2$ och $d + h = dr_2/r_1$. Volymen blir

$$V = \underbrace{\frac{\pi r_2^2(h+d)}{3}}_{\text{icke trunkerad kon}} - \underbrace{\frac{\pi r_1^2 d}{3}}_{\text{borttagen kon}} = \frac{\pi}{3}\left[\frac{r_2^3 d}{r_1} - r_1^2 d\right] = \frac{\pi}{3}\frac{d(r_2^3 - r_1^3)}{r_1} = \frac{\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}{3}$$

Arean blir $\pi r_1^2 + \pi(r_1+r_2)\sqrt{(r_1-r_2)^2+h^2}$, så vi använder ett ickelinjärt likhetsbivillkor för arean (det finns ingen anledning att använda mindre än $9\,\mathrm{m}^2$).
Bivillkoret på standardform lyder $\pi(r_1^2 + (r_1+r_2)\sqrt{(r_1-r_2)^2+h^2}) - 9 = 0$.

Sätter vi $r_2 = h = 0$ (orimligt) får vi $2\pi r_1^2 = 9$ vilket ger en enkel övre gräns för r_1 på 1.5, lite grovt, analogt för de andra variablerna (värdet 2 för båda).

Vilkoret på vinkeln kan skrivas $(r_2 - r_1)/h = \tan\alpha \geq \tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$ eller, på standardform, $r_1 - r_2 + h/\sqrt{3} \leq 0$ (ett linjärt olikhetsbivillkor).
b) Vi placerar (r_1, r_2, h) i vektorn w. Här följer koden:

```
function bad_balja
A   = [1 -1 1/sqrt(3)];
B   = 0;
Aeq = [];
Beq = [];
LB  = zeros(3, 1);
UB  = [1.5 2 2]';
w0  = ones(3, 1);  % startgissning

[w, volym] = fmincon(@obj_fun, w0, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun);

% Skriv ut
r1 = w(1)
r2 = w(2)
h  = w(3)
volym = -volym

function minus_volym = obj_fun(w)
r1 = w(1);
r2 = w(2);
h  = w(3);

minus_volym = -pi * h * (r1^2 + r1 * r2 + r2^2) / 3;

function [in_eq, eq] = constr_fun(w)
r1 = w(1);
r2 = w(2);
h  = w(3);

area  = pi * (r1^2 + (r1 + r2) * sqrt((r2 - r1)^2 + h^2));
eq    = area - 9;
in_eq = [];
```