Tentamen: Flervariabelmatematik Z2, MVE041, (MVE040), Chalmers, 2011-08-27, V

Skrivtid:	08.30-12.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@chalmers.se.
Vakt:	Magnus Önnheim, tel. 0703-088304.
	Frågor om tentamen kan ställas omkring 9.30 och 11.30.
Resultat:	E-post från LADOK. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Betygsgränser:	10, 15, 20 poäng av maximalt 25.
Lösningsförslag:	På www efter kl. 19.
Hjälpmedel:	Inga, förutom bifogat formelblad.

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.
- Vektorer och matriser skrivs med **fetstil** och ej med tilde (˜).

Kontrollera att Du skriver rätt flervariabel-tenta! Det kan gå flera samma dag.

---

1. Givet tre distinkta punkter (c_1, d_1), (c_2, d_2) och (c_3, d_3) vill vi bestämma en **axelparallell** ellips (bestäms av lillaxel, storaxel, samt centrum) vars centrum ligger på linjen $y = x$. Du kan utgå från att ellipsen existerar. Formulera ekvationerna som behövs för att bestämma ellipsen och ställ sedan upp Newtons metod för ekvationerna. Försök **inte** att lösa problemet för hand.

2. Definiera mängden M enligt: $M = \{\, (x, y, z) \,|\, x^2/1.2 + y^2/2.7 + z^2/3.3 \leq 1 \,\}$. Vi vill maximera volymen på ett rätblock ("tegelsten") som är inskriven i mängden (inga av punkterna i rätblocket får alltså ligga i komplementet till M). Så, bestäm rätblockets maximala volym och motsvarande kantlängder.
Ledning: Du får anta att rätblocket och M har samma symmetriaxlar (med avseende på rotation).
a) Gör en matematisk formulering av problemställningen. Slarva inte med detaljerna.
Om jag inte förstår vad du menar får du inga poäng på uppgiften!
b) Skriv en Matlabkod som utnyttjar `fmincon` för att lösa problemet. Ditt program skall skriva ut volym samt kantlängder. Du behöver **inte** skicka med `options`.
Lös **inte** problemet för hand, det ger **inga** poäng.

`fmincon` kan ju lösa följande problem:

```
min f(x)
  LB <= x <= UB                         enkla gränser
  A * x  <= B,      Aeq * x = Beq       linjära bivillkor
  C(x)   <= 0,      Ceq(x)  = 0         ickelinjära bivillkor
```

Vi minns också funktionsprototyperna och anropet av `fmincon`:

```
function obj_val = obj_fun(x)  och  function [in_eq, eq] = constr_fun(x)
[x_opt, obj_val] = fmincon(@obj_fun, x_guess, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun)
```

(4p)

3. Beräkna
$$\int_\gamma 3x^2y + 1\ dx + 3xy^2\ dy$$
där γ är den undre halvan av enhetscirkeln från $(1,0)$ till $(-1,0)$. (3p)

4. $t \to (t - t^2, 1 - t^3),\ t \geq 0$, är en parameterframställning av en plan kurva. Låt (a,b) beteckna punkten på kurvan som ges av $t = 2$.
a) Bestäm, på **parameterform**, kurvans tangentlinje i punkten (a,b).
b) Bestäm också **ekvationen**, för kurvans tangentlinje, i punkten (a,b).
c) Bestäm **ekvationen** för den räta linje som är ortogonal mot tangenten och som går genom (a,b). (3p)

5. Bestäm största och minsta värde av funktionen, $f(x,y) = x^2+y^2+xy+x+y$, under bivillkoret $x^2+y^2 = 1$. (3p)

6. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av $z = 9x^2 + 4y^2 + 6x - 4y - 14$ och xy-planet (punkten $(0,0,-10)$ tillhör kroppen). (3p)

7. Bestäm alla lösningar, $u(x,y)$, till differentialekvation nedan, genom att göra variabelbytet, $s = x - y$ och $t = xy$:
$$xu'_x - yu'_y = x^2 - y^2, x > 0, y > 0 \qquad (3p)$$

8. Avgör för a) respektive b) nedan om gränsvärdet existerar och beräkna i så fall gränsvärdet.
$$\text{a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)\sin(x^2-y^2)}{x^4-y^4} \qquad \text{b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)\sin(x^2-y^2)}{x^4+y^4}$$
(3p)