

Tentamen: Flervariabelmatematik Z2, MVE041, (MVE040), Chalmers, 2011-01-12, V

Skrivtid: 08.30-12.30.
Ansvarig: Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@chalmers.se.
Vakt: Peter Helgesson, tel. 0703-088304.
Frågor om tentamen kan ställas omkring 9.30 och 11.30.
Resultat: E-post från LADOK. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Betygsgränser: 10, 15, 20 poäng av maximalt 25.
Lösningförslag: På www efter kl. 19.
Hjälpmedel: Inga, förutom bifogat formelblad.

Iakttag följande:

- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.
- Vektorer och matriser skrivs med **fetstil** och ej med tilde ($\tilde{}$).

Kontrollera att Du skriver rätt flervariabel-tenta! Det kan gå flera samma dag.

1. Givet fyra distinkta punkter (c_1, d_1) , (c_2, d_2) , (c_3, d_3) och (c_4, d_4) vill vi bestämma en **axelparallell** ellips (bestäms av lillaxel, storaxel, samt centrum). Formulera ekvationerna som behövs för att bestämma ellipsen och ställ sedan upp Newtons metod för ekvationerna. Försök **inte** att lösa problemet för hand. (3p)
2. Vi har en låda med lock (rätblock). Lådan har måtten $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1.3\text{ m}$. I lådan vill vi packa **fyra** klot med samma radie. Kloten måste rymmas i lådan och vi vill att klotens sammanlagda volym skall maximeras.
 - a) Gör en matematisk formulering av problemställningen. Slarva inte med detaljerna.
Om jag inte förstår vad du menar får du inga poäng på uppgiften!
 - b) Skriv en Matlabkod som utnyttjar `fmincon` för att lösa problemet. Ditt program skall skriva ut radien samt de värden som behövs för att placera kloten i lådan. Du behöver **inte** skicka med `options`. Lös **inte** problemet för hand, det ger **inga** poäng.

`fmincon` kan ju lösa följande problem:

```
min f(x)
  LB <= x <= UB          enkla gränser
  A * x <= B,           Aeq * x = Beq  linjära bivillkor
  C(x) <= 0,           Ceq(x) = 0     ickelinjära bivillkor
```

Vi minns också funktionsprototyperna och anropet av `fmincon`:

```
function obj_val = obj_fun(x) och function [in_eq, eq] = constr_fun(x)
[x_opt, obj_val] = fmincon(@obj_fun, x_guess, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun)
```

(4p)

3. Beräkna

$$\int_{\gamma} x + y \, dx - x + y \, dy$$

där γ är kurvan $4x^2 + 9y^2 = 1$ med positiv orientering. (3p)

4. $t \rightarrow (t + t^2, t^3)$, $t \geq 0$, är en parameterframställning av en plan kurva. Låt (a, b) beteckna punkten på kurvan som ges av $t = 2$.

a) Bestäm, på **parameterform**, kurvans tangentlinje i punkten (a, b) .

b) Bestäm också **ekvationen**, för kurvans tangentlinje, i punkten (a, b) .

c) Bestäm **ekvationen** för den räta linje som är ortogonal mot tangenten och som går genom (a, b) . (3p)

5. Bestäm största och minsta värde av funktionen, $f(x, y) = xy - 2 \ln(1 + x^2 + y^2)$, i området $D = \{(x, y) \mid y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. (3p)

6. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna

$$z = x^2 + y^2 \text{ och } z = 10x^2 + 5y^2 + 6x - 4y - 14 \quad (3p)$$

7. Bestäm alla lösningar, $u(x, y, z)$, till differentialekvation nedan, där lösningarna har formen $u(x, y, z) = g(r)$ med $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 1 \quad (3p)$$

8. Avgör för a) respektive b) nedan om gränsvärdet existerar och beräkna i så fall gränsvärdet.

$$\text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2} \qquad \text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{x^2 + y^2}$$

(3p)