Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2011-01-12

1. Låt halva lillaxeln vara a och halva storaxeln b. Med centrum (p,q) blir ellipsens ekvation då $(p-x)^2/a^2+(q-y)^2/b^2=1$. De fyra ekvationerna lyder:

$$\begin{aligned}(p-c_1)^2/a^2+(q-d_1)^2/b^2-1 &= 0\\(p-c_2)^2/a^2+(q-d_2)^2/b^2-1 &= 0\\(p-c_3)^2/a^2+(q-d_3)^2/b^2-1 &= 0\\(p-c_4)^2/a^2+(q-d_4)^2/b^2-1 &= 0\end{aligned}$$

så att Newtons metod blir

$$\begin{bmatrix} p_{k+1}\\ q_{k+1}\\ a_{k+1}\\ b_{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_k\\ q_k\\ a_k\\ b_k\end{bmatrix}-\mathbf{J}^{-1}\begin{bmatrix}(p_k-c_1)^2/a_k^2+(q_k-d_1)^2/b_k^2-1\\(p_k-c_2)^2/a_k^2+(q_k-d_2)^2/b_k^2-1\\(p_k-c_3)^2/a_k^2+(q_k-d_3)^2/b_k^2-1\\(p_k-c_4)^2/a_k^2+(q_k-d_4)^2/b_k^2-1\end{bmatrix}$$

där

$$\mathbf{J}=2\begin{bmatrix}(p_k-c_1)/a_k^2 & (q_k-d_1)/b_k^2 & -(p_k-c_1)^2/a_k^3 & -(q_k-d_1)^2/b_k^3\\(p_k-c_2)/a_k^2 & (q_k-d_2)/b_k^2 & -(p_k-c_2)^2/a_k^3 & -(q_k-d_2)^2/b_k^3\\(p_k-c_3)/a_k^2 & (q_k-d_3)/b_k^2 & -(p_k-c_3)^2/a_k^3 & -(q_k-d_3)^2/b_k^3\\(p_k-c_4)/a_k^2 & (q_k-d_4)/b_k^2 & -(p_k-c_4)^2/a_k^3 & -(q_k-d_4)^2/b_k^3\end{bmatrix}$$

2. a) Placera lådan i ett koordinatsystem där $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1, 0\le z\le h$ där $h=1.3$, är höjden. Låt $(x_k,y_k,z_k),\ k=1,\ldots,4$ vara centrum för klot k och låt r vara radien (samma radie i alla fyra). Vi vill maximera den sammanlagda volymen, $4(4\pi r^3/3)=16\pi r^3/3$ vilket vi kan göra genom att maximera r. Vi kommer att ha två typer av bivillkor. Den första typen ser till att ingen del av något klot hamnar utanför lådan och den andra typen ser till att inte två klot skär varandra.

   Bivillkoren blir

$$r-x_k\le 0,\ r-y_k\le 0,\ r-z_k\le 0,\ k=1,\ldots,4$$

$$r+x_k\le 1,\ r+y_k\le 1,\ r+z_k\le h,\ k=1,\ldots,4$$

   För att inte två skivor skall överlappa ser vi till att centrumavståndet mellan varje skiv-par är minst $2r$, dvs.

$$\sqrt{(x_j-x_k)^2+(y_j-y_k)^2+(z_j-z_k)^2}\ge 2r,\ 1\le j<k\le 4$$

   b) Vi har 13 variabler, som vi placerar i en kolonnvektor: $w=[x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,x_3,y_3,z_3,x_4,y_4,z_4,r]^T$. De linjära olikhetsbivillkoren är redan skriva på standardform ovan. De ickelinjära villkoren skrivs:

$$2r-\sqrt{(x_j-x_k)^2+(y_j-y_k)^2+(z_j-z_k)^2}\le 0,\ 1\le j<k\le 4$$

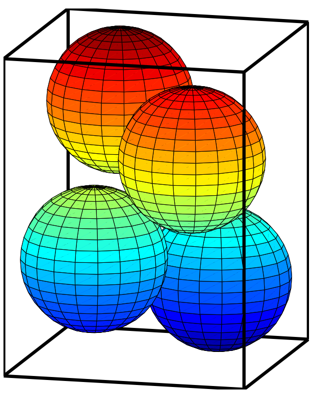
   vilket kan skrivas kortare om vi inför $\mathbf{c}_k=[x_k,y_k,z_k]^T$, ty då blir villkoren:

$$2r-|\mathbf{c}_j-\mathbf{c}_k|\le 0,\ 1\le j<k\le 4$$

   Här följer koden, lite hoptryckt för att spara plats.

```
function bollar
A = [-eye(12), ones(12, 1)      % r - x_k <= 0, r - y_k <= 0, r - z_k <= 0
      eye(12), ones(12, 1)];    % r + x_k <= 1, r + y_k <= 1, r + z_k <= h
h = 1.3;  % höjd
B = [zeros(12, 1); [1 1 h  1 1 h  1 1 h  1 1 h]'];

Aeq = []; Beq = [];
LB = zeros(13, 1);   UB = [B(13:end); 1];

w0 = rand(13, 1);  % startgissning

w = fmincon(@obj_fun, w0, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun);

% Skriv ut koordinater för klotens centra och radie
c1 = w(1:3)
c2 = w(4:6)
c3 = w(7:9)
c4 = w(10:12)
r  = w(end)

function volym = obj_fun(w)
volym = -w(end);  % räcker att maximera r

function [in_eq, eq] = constr_fun(w)
c1 = w(1:3);   % centrum för klot ett
c2 = w(4:6);   % centrum för klot två
c3 = w(7:9);   % centrum för klot tre
c4 = w(10:12); % centrum för klot fyra
r  = w(end);
in_eq = 2 * r - [norm(c1 - c2); norm(c1 - c3); norm(c1 - c4); ...
                 norm(c2 - c3); norm(c2 - c4); norm(c3 - c4);];
eq = [];
```

Här är en bild som visar den optimala utformningen:



3. Randen definierar ett slutet område (en ellipsskiva), så vi kan använda Greens formel.

$$\int_\gamma x + y\; dx - x + y\; dy \iint_D -1 - 1\; dxdy = -2 \iint_D 1\; dxdy = -2\mu(D) = -2\pi\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

där $\mu(D)$ är arean av integrationsområdet (ellipsskivan).

Man behöver inte använda Greens formel utan kan räkna ut kurvintegralen genom att parametrisera kurvan med elliptisk-polära koordinater $x = (1/2)\cos\varphi,\ y = (1/3)\sin\varphi,\ \varphi \in (0, 2\pi)$.

$$\int_\gamma x{+}y\,dx{-}x{+}y\,dy = \int_0^{2\pi}((1/2)\cos\varphi{+}(1/3)\sin\varphi)(-(1/2)\sin\varphi){+}(-(1/2)\cos\varphi{+}(1/3)\sin\varphi)(1/3)\cos\varphi\,d\varphi$$

som också blir $-\pi/3$. Man kan använda formlerna för dubbla vinkeln för att hitta en primitiv funktion samt utnyttja egenskaper hos udda/jämna funktioner om man vill.

4. Vi ser att $(a, b) = (6, 8)$. Tangentriktningen ges av derivatorna av koordinatfunktionerna, så $(1 + 2t, 3t^2)$, och då $t = 2$, $(5, 12)$. Parameterframställningen kan då skrivas

$$t \to (6, 8) + t(5, 12)$$

$(-12, 5)$ är ortogonal mot riktningsvektorn ovan, varför ekvationen blir

$$0 = -12(x - 6) + 5(y - 8) \quad \text{eller} \quad 12x - 5y - 32 = 0$$

Slutligen c). Som normalvektor kan vi ta riktningsvektorn till tangentlinjen så ekvationen blir

$$0 = 5(x - 6) + 12(y - 8) \quad \text{eller} \quad 5x + 12y - 126 = 0$$

5. Området utgörs av den del av enhetscirkelskivan som ligger i övre halvplanet (första och andra kvadranterna). Mängden är kompakt och funktionen är kontinuerlig, alltså existerar största och minsta värde. Dessa antas i en inre punkt eller i en randpunkt.

Först de inre punkterna. $\text{grad}f(x, y) = [y - 4x/(1 + x^2 + y^2), x - 4y/(1 + x^2 + y^2)]$ som är nollvektorn då $y - 4x/(1 + x^2 + y^2) = 0$ och $x - 4y/(1 + x^2 + y^2) = 0$. Detta medför (subtrahera ekvationerna ledvis) $y - x + 4(y - x)/(1 + x^2 + y^2) = 0$. En möjlighet är att $x = y$. Om så inte är fallet får vi $1 + 4/(1 + x^2 + y^2) = 0$ som saknar lösning. $x = y$ i $f'_x(x, y) = 0$ ger $x - 4x/(1 + 2x^2) = 0$ eller $2x^3 - 3x = 0$ som har lösningarna $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3/2}$ (som inte tillhör området). Den enda tänkbara punkten är alltså $(0, 0)$, med $f(0, 0) = 0$.

Nu till randpunkterna där vi använder Lagrange-tekniken (med determinanten) för cirkelbågen. Så vi placerar gradienten av f och av bivillkoret $x^2 + y^2 - 1$ som kolonner i en matris och sätter dess determinant till noll vilket ger ekvationen $x^2 - 4xy/(1 + x^2 + y^2) = y^2 - 4xy/(1 + x^2 + y^2)$ dvs. $x^2 = y^2$. Detta i bivillkoret ger $2x^2 = 1$ så att $x = \pm 1/\sqrt{2}$ och $y = 1/\sqrt{2}$. Funktionsvärdena är $f(\pm 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \pm 1/2 - 2\ln(2) \approx -1.89, -0.89$ (använd tabellvärdena i formelbladet). Randpunkterna till cirkelbågen ger funktionsvärden $f(\pm 1, 0) = -2\ln 2 \approx -1.39$.

Slutligen har vi intervallet $[-1, 1]$ utmed x-axeln där $f(x, 0) = -2\ln(1 + x^2)$ som tydligen antar maximum, 0, för $x = 0$ och minimum för randpunkterna som vi redan kontrollerat.

Svar: minsta värde $-1/2 - \ln 4$, största värde 0.

6. Vi bestämmer skärningskurvan i x-y-planet genom att sätta z-värdena lika:

$$x^2 + y^2 = 10x^2 + 5y^2 + 6x - 4y - 14 \Leftrightarrow 9x^2 + 4y^2 + 6x - 4y - 14 = 0 \Leftrightarrow (3x + 1)^2 + (2y - 1)^2 = 16$$

Integrationsområdet ges av $D = \{\ (x, y)\ :\ (3x{+}1)^2{+}(2y{-}1)^2 \le 4^2\ \}$. Vi inför elliptisk-polära koordinater: $x = -1/3 + (r/3)\cos\varphi,\ y = 1/2 + (r/2)\sin\varphi,\ 0 \le r \le 4,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$, där funktionaldeterminanten blir $r/6$. Volymen kan alltså skrivas:

$$\iint_D x^2 + y^2 - (10x^2 + 5y^2 + 6x - 4y - 14)\ dxdy = \iint_D 16 - ((3x + 1)^2 + (2y - 1)^2)\ dxdy =$$

$$\int_0^4 \left(\int_0^{2\pi} (16 - r^2)r/6\ d\varphi\right)\ dr = \pi/3 \int_0^4 16r - r^3\ dr = \pi/3\left[8r^2 - r^4/4\right]_0^4 = 64\pi/3$$

7. Vi deriverar:

$$u'_x = g'(r)\,r'_x = g'(r)x/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Nu blir det derivatan av en produkt (där $g'(r)$ är den första faktorn):

$$u''_{xx} = g''(r)r'_x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + g'(r)\,\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^2} = g''(r)\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + g'(r)\,\frac{y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}$$

Pga symmetri blir

$$u''_{yy} = g''(r)\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + g'(r)\,\frac{x^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}$$

$$u''_{zz} = g''(r)\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} + g'(r)\,\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}$$

så att

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = g''(r) + \frac{2g'(r)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = g''(r) + \frac{2g'(r)}{r}$$

För att lösa denna DE inför vi $h(r) = g'(r)$ och får $h' + 2h/r = 1$ som har lösningen (integrerande faktor), $h(r) = r/3 + c/r^2$, där c är en konstant. Så, $g(r) = r^2/6 + c_1/r + c_2$ där c_1 och c_2 är konstanter. I de ursprungliga variablerna blir alltså $g(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)/6 + c_1/\sqrt{x^2+y^2+z^2} + c_2$.

8. Gränsvärdet i a) existerar inte. Tag $x = 0, y \neq 0$ gränsvärdet blir då -1. Tag $x \neq 0, y = 0$ gränsvärdet blir då 1. Olika vägar mot origo kan alltså ge olika gränsvärden, varför gränsvärdet inte existerar.

   Gränsvärdet i b) existerar och är noll. Vi kan t.ex. använda polära koordinater, $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ och får

$$\frac{x^4y}{x^2+y^2} = \frac{r^5\cos^4\varphi\sin\varphi}{r^2} = r^3\cos^4\varphi\sin\varphi \to 0, \quad r \to 0$$

   eftersom $|\cos^4\varphi\sin\varphi| \leq 1$.