Thomas Ericsson
Matematik, Chalmers/GU

Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2010-10-21

1. Låt radien vara r och centrum (p, q). Cirkelns ekvation är då $(p-x)^2 + (q-y)^2 = r^2$. De tre ekvationerna lyder:

$$\begin{aligned}(p-a_1)^2 + (q-b_1)^2 - r^2 &= 0\\ (p-a_2)^2 + (q-b_2)^2 - r^2 &= 0\\ (p-a_3)^2 + (q-b_3)^2 - r^2 &= 0\end{aligned}$$

så att Newtons metod blir

$$\begin{bmatrix} p_{k+1}\\ q_{k+1}\\ r_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_k\\ q_k\\ r_k\end{bmatrix} - 0.5\cdot \begin{bmatrix} p_k-a_1 & q_k-b_1 & -r_k\\ p_k-a_2 & q_k-b_2 & -r_k\\ p_k-a_3 & q_k-b_3 & -r_k\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (p_k-a_1)^2 + (q_k-b_1)^2 - r_k^2\\ (p_k-a_2)^2 + (q_k-b_2)^2 - r_k^2\\ (p_k-a_3)^2 + (q_k-b_3)^2 - r_k^2\end{bmatrix}$$

2. a) Placera lådan i ett koordinatsystem där $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, 0 \le z \le h$ där $h = 1.3$, är höjden.
Låt $(x_k, y_k, z_k),\ k = 1, 2, 3$ vara centrum för klot k och låt r vara radien (samma radie i alla tre). Vi vill maximera den sammanlagda volymen, $3(4\pi r^3)/3 = 4\pi r^3$ vilket vi kan göra genom att maximera r. Vi kommer att ha två typer av bivillkor. Den första typen ser till att ingen del av något klot hamnar utanför lådan och den andra typen ser till att inte två klot skär varandra.

Bivillkoren blir

$$r - x_k \le 0,\ r - y_k \le 0,\ r - z_k \le 0,\ k = 1, 2, 3$$
$$r + x_k \le 1,\ r + y_k \le 1,\ r + z_k \le h,\ k = 1, 2, 3$$

För att inte två skivor skall överlappa ser vi till att centrumavståndet mellan varje skiv-par är minst $2r$, dvs.

$$\sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2} \ge 2r,\ 1 \le j < k \le 3$$

b) Vi har tio variabler, som vi placerar i en kolonnvektor: $w = [x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, r]^T$.
De linjära olikhetsbivillkoren är redan skriva på standardform ovan. De ickelinjära villkoren skrivs:

$$2r - \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2} \le 0,\ 1 \le j < k \le 3$$

vilket kan skrivas kortare om vi inför $\mathbf{c}_k = [x_k, y_k, z_k]^T$, ty då blir villkoren:

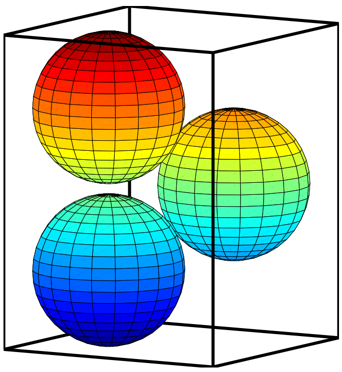
$$2r - |\mathbf{c}_j - \mathbf{c}_k| \le 0,\ 1 \le j < k \le 3$$

Här följer koden, lite hoptryckt för att spara plats.

```
function bollar
% Linjära olikhetsbivillkor:

h = 1.3;                       % höjd
A = [-eye(9), ones(9, 1)       % r - x_k <= 0, r - y_k <= 0, r - z_k <= 0
      eye(9), ones(9, 1)];     % r + x_k <= 1, r + y_k <= 1, r + z_k <= h
B = [zeros(9, 1); [1 1 h 1 1 h 1 1 h]'];

Aeq = []; Beq = [];
LB = zeros(10, 1);   UB = [B(10:end); 1];
```

```
w0 = rand(10, 1);  % startgissning

[w, volym] = fmincon(@obj_fun, w0, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun);

% Skriv ut koordinater för klotens centra och radie
c1 = w(1:3)
c2 = w(4:6)
c3 = w(7:9)
r  = w(end)
volym = -volym  % för att få rätt tecken

function volym = obj_fun(w)
volym = -(4 * pi) * w(end)^3;  % tre klot med volym 4 pi r^3 /3

function [in_eq, eq] = constr_fun(w)
c1 = w(1:3);  % centrum för klot ett
c2 = w(4:6);  % centrum för klot två
c3 = w(7:9);  % centrum för klot tre
r  = w(end);
in_eq = 2 * r - [norm(c1 - c2); norm(c1 - c3); norm(c2 - c3)];

eq = [];
```

Här är en bild som visar den optimala utformningen:



3. Randen definierar ett slutet område, så vi kan använda Greens formel. Låt D vara (den fyllda) kvadraten med hörn i $(2,0),(0,2),(-2,0),(0,-2)$. Randen består av fyra räta linjesegment, med ekvationer (från första till fjärde kvadranten) $x = 2 - y$, $x = -2 + y$, $x = -2 - y$ och $x = 2 + y$, Vi får dela upp dubbelintegralen i två delar och får:

$$\int_\gamma 2xy - y\ dx + x^2y\ dy = \iint_D 2xy - 2x + 1\ dxdy =$$

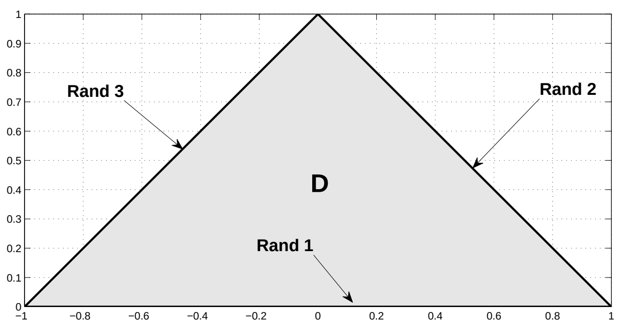
$$\int_{-2}^{0} \left(\int_{-2-y}^{2+y} 2xy - 2x + 1\ dx \right) dy + \int_0^2 \left(\int_{-2+y}^{2-y} 2xy - 2x + 1\ dx \right) dy =$$

(integralen över $2xy - 2x$ blir noll, udda integrand och symmetriskt intervall, med avseende på x)

$$\int_{-2}^{0} 4 + 2y\ dy + \int_0^2 4 - 2y\ dy = 8 - 4 + 8 - 4 = 8$$

4. Vi ser att $(a, b) = (2, 1)$. Vektorn $(2, 3)$ utgör en normal till första linjen, så $\pm(3, -2)$ är riktningsvektorer för linjen. För den andra linjen är $(1, -1)$ en normalriktning så att $\pm(1, 1)$ är riktningsvektorer. Vi räknar nu ut riktningsderivatorna utmed de fyra vektorerna (som vi först normerar).
grad$f(x, y) = (2x - 3y, -3x + 3y^2)$ så att grad$f(2, 1) = (1, -3)$. Med $\mathbf{v} = \pm(3, -2)/\sqrt{13}$ får vi
$$f'_{\mathbf{v}}(2, 1) = \pm(3, -2)/\sqrt{13} \cdot (1, -3) = \pm(9/\sqrt{13}) \approx \pm 2.5$$
Med $\mathbf{v} = \pm(1, 1)/\sqrt{2}$ får vi
$$f'_{\mathbf{v}}(2, 1) = \pm(1, 1)/\sqrt{2} \cdot (1, -3) = \pm(-2/\sqrt{2}) = \mp\sqrt{2} \approx \mp 1.4$$
så att f växer snabbast i riktningen $(3, -2)$, med derivata $9/\sqrt{13}$, och avtar snabbast i riktningen $-(3, -2)$, med derivata $-9/\sqrt{13}$.

5. Följande bild visar hur området D ser ut:



Mängden är kompakt och funktionen är kontinuerlig, alltså existerar största och minsta värde. Dessa antas i en inre punkt eller i en randpunkt.

Först de inre punkterna. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy - 2x - y + 2$, så att grad$f(x, y) = [2x + 3y - 2, 3x + 2y - 1]$ som är nollvektorn när $(x, y) = (-1, 4)/5 \in D$, men som ligger på randen.

Nu till randpunkter, där vi börjar med rand 1. $g(x) = f(x, 0) = x^2 - 2x + 2$ då $-1 \leq x \leq 1$. Inre punkter: $g'(x) = 2x - 2$ som är noll när $x = 1$, vilket är en randpunkt till intervallet.
Randpunkter till intervallet: $g(-1) = 5, g(1) = 1$.

Nu till rand 2 där $y = 1 - x$, $0 \leq x \leq 1$, så $g(x) = f(x, 1 - x) = 2 - x^2$. $g'(x) = -2x$ när $x = 0$, vilket är en randpunkt till intervallet. Randpunkter: $g(0) = 2$. $x = 1$ har vi redan kontrollerat.

Nu till rand 3 där $y = 1 + x$, $-1 \leq x \leq 0$, så $g(x) = f(x, 1 + x) = 5x^2 + 2x + 2$. $g'(x) = 10x + 2$ som är noll när $x = -1/5$ som tillhör intervallet. $g(-1/5) = 9/5$. Randpunkterna har vi redan kontrollerat.

Svar: minsta värde 1, största värde 5.

6. Vi bestämmer skärningskurvan i x-y-planet genom att sätta z-värdena lika:
$$x^2 + y^2 = 5x^2 + 10y^2 + 4x - 6y - 7 \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 + 4x - 6y - 7 = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 + (3y - 1)^2 = 9$$

Integrationsområdet ges av $D = \{ (x, y) \ : \ (2x+1)^2+(3y-1)^2 \leq 3^2 \}$. Vi inför elliptisk-polära koordinater: $x = -1/2 + (r/2)\cos\varphi,\ y = 1/3 + (r/3)\sin\varphi,\ 0 \leq r \leq 3,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, där funktionaldeterminanten blir $r/6$. Volymen kan alltså skrivas:

$$\iint_D x^2 + y^2 - (5x^2 + 10y^2 + 4x - 6y - 7)\ dxdy = \iint_D 9 - (2x+1)^2 - (3y-1)^2\ dxdy =$$

$$\int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} (9 - r^2)r/6\ d\varphi \right)\ dr = \pi/3 \int_0^3 9r - r^3\ dr = \pi/3 \left[9r^2/2 - r^4/4\right]_0^3 = 27\pi/4$$

7. Vi deriverar:

$$u'_x = g'(r)\, r'_x = g'(r) x / \sqrt{x^2 + y^2}$$

Nu blir det derivatan av en produkt (där $g'(r)$ är den första faktorn):

$$u''_{xx} = g''(r) r'_x \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + g'(r)\ \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}^2} = g''(r)\frac{x^2}{x^2+y^2} + g'(r)\ \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

Pga symmetri blir

$$u''_{yy} = g''(r)\frac{y^2}{x^2+y^2} + g'(r)\ \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

så att

$$u''_{xx} + u''_{yy} = g''(r) + \frac{g'(r)}{\sqrt{x^2+y^2}} = g''(r) + \frac{g'(r)}{r}$$

8. Gränsvärdet i a) existerar inte. Tag $z = \alpha x$ för en godtycklig konstant $\alpha \neq 0$ och $x \neq 0$, då gäller:

$$\frac{\sin(xy)}{yz} = \frac{\sin(xy)}{\alpha xy} \to \frac{1}{\alpha}, \quad (x, y, z) \to (0, 0, 0)$$

Olika vägar mot origo kan alltså ge olika gränsvärden, varför gränsvärdet inte existerar.

Gränsvärdet i b) existerar och är noll. Antag först att $x = 0$ men $y \neq 0$ då är $\frac{x^4 y}{x^2+(x+y)^2} = 0$. Antag nu att $x \neq 0$. Vi använder instängning.

$$0 \leq \left| \frac{x^4 y}{x^2 + (x+y)^2} \right| \leq \left| \frac{x^4 y}{x^2} \right| = \left| x^2 y \right| \to 0, \quad (x, y) \to (0, 0)$$