Tentamen: Flervariabelmatematik Z2, MVE041, (MVE040), Chalmers, 2010-08-27, V

Skrivtid:	08.30-12.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@chalmers.se.
Vakt:	Fredrik Lindgren, tel. 0703-088304.
	Frågor om tentamen kan ställas omkring 9.30 och 11.30.
Resultat:	Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Betygsgränser:	10, 15, 20 poäng av maximalt 25.
Lösningsförslag:	På www efter kl. 19.
Hjälpmedel:	Inga, förutom bifogat formelblad.

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.
- Vektorer och matriser skrivs med **fetstil** och ej med tilde (˜).

Kontrollera att Du skriver rätt flervariabel-tenta! Det kan gå flera samma dag.

1. Antag att vi har en dator vars flyttalsenhet endast kan beräkna $+, -, *$ men saknar hårdvara för division. Vi kan approximera $1/y$ (givet $y > 0$) med hjälp av Newtons metod. Formulera en **lämplig** ekvation och sätt sedan upp Newtons metod (som givetvis inte får innehålla någon division) för ekvationen. Du kan får vrida och vända på ekvationen några gånger för att bli av med divisionen i Newtons metod. (3p)

2. Låt $f(x, y) = 0.4 \sin(3xy + y) + 1$. Minimera $f(x, y)$ då (x, y) tillhör området som ges av $|x| + |y| \leq 1$ och $|y| <= x^2$.
a) Skriv om problemet så att alla ingående funktioner är deriverbara. Slarva inte med detaljerna.
Om någon funktion inte är deriverbar, i din lösning, så får du inga poäng på uppgiften!
Rita en bild av bivillkorsmängden.
Ange också rimliga värden på de enkla gränserna.

b) Skriv en Matlabkod som utnyttjar `fmincon` för att lösa problemet (lös det **inte** för hand, det ger **inga** poäng). Ditt program skall skriva ut optimala x, y samt $f(x, y)$. Du behöver **inte** skicka med `options`.

`fmincon` kan ju lösa följande problem:

```
min f(x)
  LB <= x <= UB                    enkla gränser
  A * x  <= B,     Aeq * x = Beq   linjära bivillkor
  C(x)   <= 0,     Ceq(x)  = 0     ickelinjära bivillkor
```

Vi minns också funktionsprototyperna och anropet av `fmincon`:

```
function obj_val = obj_fun(x)  och  function [in_eq, eq] = constr_fun(x)
[x_opt, obj_val] = fmincon(@obj_fun, x_guess, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun)
```

(3p)

3. Beräkna
$$\int_\gamma ye^x + y^2\ dx + e^x\ dy$$
där γ är linjestyckena från $(0,0)$ till $(0,1)$ och från $(0,1)$ till $(1,1)$. (3p)

4. För vilka punkter på ytan $x(y^2+1) - z^2 + 1 = 0$ gäller att tangentplanet i punkten är parallellt med planet $x - z = 0$? (3p)

5. Bestäm största och minsta värde av funktionen, $f(x,y) = xy + x$, i området $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$. (3p)

6. En kropp beskrivs av olikheterna
$$x^2 + z^2 \leq 1, \quad y \geq 0, \quad y + z \leq 4$$
Kroppens densitet, $\rho(x,y,z)$, i punkten (x,y,z) ges av $\rho(x,y,z) = (4-z)2y$. Beräkna kroppens massa. (4p)

7. Givet differentialekvationen
$$xf'_x + yf'_y = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \ (x,y) \neq (0,0)$$
hitta alla lösningar på formen $f(x,y) = g(r)$, då $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
Bestäm också den lösning som dessutom uppfyller $f(x,y) = 2$ då $r = 1$. (3p)

8. Avgör för a) respektive b) nedan om gränsvärdet existerar och beräkna i så fall gränsvärdet.
$$\text{a)} \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{e^x - y}{x} \qquad \text{b)} \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{\sin(y)}{y} \cdot \frac{\log(1+z)}{z}$$
(3p)