Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2010-01-14

1. Ekvationerna blir:

$$\begin{cases} a + b + \cos c - 1 = 0 \\ a + 2b - c \sin c - 1.23 = 0 \\ 2a + 4b + \cos(2c) - 0.75 = 0 \end{cases}$$

varför Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\sin(c_k) \\ 1 & 2 & -(\sin(c_k) + c_k \cos(c_k)) \\ 2 & 4 & -2\sin(2c_k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_k + b_k + \cos c_k - 1 \\ a_k + 2b_k - c_k \sin c_k - 1.23 \\ 2a_k + 4b_k + \cos(2c_k) - 0.75 \end{bmatrix}$$

2. a) Placera duken i ett koordinatsystem och låt dukens hörn vara $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1/2, \sqrt{3}/2)$.
Låt (x_k, y_k), $k = 1, 2$ vara centrum för skiva k och låt r vara radien (samma radie i båda). Vi vill maximera den sammanlagda arean, $2\pi r^2$ vilket vi kan göra genom att maximera r. Vi kommer att ha två typer av bivillkor. Den första typen ser till att ingen del av någon skiva hamnar utanför triangeln (gummiduken) och den andra typen ser till att inte två skivor överlappar.

Vi studerar först triangelkanten mellan $(0, 0)$ och $(1, 0)$.

Bivillkoren blir (för $k = 1, 2$)

$$-y_k + r \le 0$$

Nu till kanten mellan $(0, 0)$ och $(1/2, \sqrt{3}/2)$. Ekvationen för den räta linje, där kanten utgör en del, är $-\sqrt{3}x + y = 0$. En normerad normalvektor (som pekar snett uppåt vänster) till linjen är: $(-\sqrt{3}, 1)/2$. Om vi rör oss från (x_k, y_k), utmed denna normal får vi inte komma ovanför triangelkanten, dvs.
$(x_k, y_k) + r(-\sqrt{3}, 1)/2$ måste ligga under eller på triangelkanten, dvs.

$$-\sqrt{3}(x_k - r\sqrt{3}/2) + y_k + r/2 \le 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}x_k + y_k + 2r \le 0$$

Slutligen kanten mellan $(1, 0)$ och $(1/2, \sqrt{3}/2)$. Ekvationen för den räta linje, där kanten utgör en del, är $\sqrt{3}x + y = \sqrt{3}$. En normerad normalvektor (som pekar snett uppåt höger) till linjen är: $(\sqrt{3}, 1)/2$. Om vi rör oss från (x_k, y_k), utmed denna normal får vi inte komma ovanför triangelkanten, dvs.
$(x_k, y_k) + r(\sqrt{3}, 1)/2$ måste ligga under eller på triangelkanten, dvs.

$$\sqrt{3}(x_k + r\sqrt{3}/2) + y_k + r/2 - \sqrt{3} \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x_k + y_k + 2r \le \sqrt{3}$$

För att inte två skivor skall överlappa ser vi till att centrumavståndet mellan skiv-paret är minst $2r$, dvs.

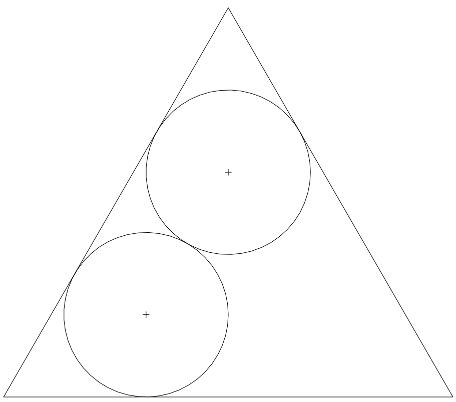
$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \ge 2r$$

b) Vi har fem variabler, som vi placerar i en kolonnvektor: $w = [x_1, x_2, y_1, y_2, r]^T$.
Bivillkoren är redan skrivna standardform ovan. Här följer koden, lite hoptryckt för att spara plats.

```
function packning
s = sqrt(3);
%    x1 x2 y1 y2  r
A = [ 0  0 -1  0  1
      0  0  0 -1  1
     -s  0  1  0  2
      0 -s  0  1  2
      s  0  1  0  2
      0  s  0  1  2];
```

```
B = [0 0 0 0 s s]';

Aeq = []; Beq = [];
LB = zeros(5, 1);   UB = ones(5, 1);

w0 = rand(5, 1);  % startgissning

w = fmincon(@obj_fun, w0, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun);

% Skriv ut koordinater och radie
x = w(1:2)
y = w(3:4)
r = w(end)

function area = obj_fun(w)
area = -w(end);

function [in_eq, eq] = constr_fun(w)
x = w(1:2);
y = w(3:4);
r = w(end);
in_eq = 2 * r - sqrt((x(1) - x(2))^2 + (y(1) - y(2))^2);
eq    = [];
```

Här är en bild som visar den optimala utformningen (att ha skivorna ovanför varandra ger mindre area):



3. Vi parametriserar γ genom $t \to (t, 1/t), t \in [1, 2]$. Integralen kan skrivas

$$\int_1^2 (1/t^2 - t^3) \cdot 1 - (t/(1/t)) \cdot (-1/t^2)\, dt = \int_1^2 1/t^2 - t^3 + 1\, dt = [-1/t - t^4/4 + t]_1^2 = \ldots = -9/4$$

4. Ytans normal (gradienten), i punkten, skall vara parallell med planets normal, $(11, 0, 1)$. Gradienten är $(3x^2 + 3y - 1, 3x, -2)$ och det skall alltså existera en skalär, λ, så att $(3x^2 + 3y - 1, 3x, -2) = \lambda\,(11, 0, 1)$. Detta ger (lös från höger till vänster): $\lambda = -2$, $x = 0$ och $y = -7$. Eftersom punkten skall ligga i ytan får vi $z = (x^3 + 3xy - x + 4)/2 = 2$. Den sökta punkten är alltså $(0, -7, 2)$. Tangentplanets ekvation i denna punkt är

$$(11, 0, 1) \cdot (x - 0, y - (-7), z - 2) = 0 \Leftrightarrow 11x + z - 2 = 0$$

5. Vi har en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd, så största och minsta värde existerar. Dessa antas i en inre punkt där gradienten är lika med nollvektorn, eller i en randpunkt. Först inre punkter.
Vi söker nollställen till gradienten $\operatorname{grad} f = [2x - 2y + y^2,\ -2x + 2xy] = [2x - 2y + y^2,\ 2x(-1 + y)]$ vilket ger oss de stationära punkterna. Vi börjar med den andra ekvationen, $2x(-1+y) = 0$ som har lösningarna $x = 0$ eller $y = 1$. $x = 0$ i den första ekvationen, $2x - 2y + y^2 = 0$, ger $y(-2 + y) = 0$ så att $y = 0$ eller $y = 2$. $y = 1$ i den första ekvationen ger $2x - 1 = 0$ så att $x = 1/2$. Vi har alltså hittat följande stationära punkter: $(0, 0)$ och $(1/2, 1)$ som tillhör området och randpunkten $(0, 2)$. Det relevanta funktionsvärdena är $f(0, 0) = 0$ och $f(1/2, 1) = -1/4$.
Nu till randen som vi får behandla i fyra fall:

(a) $x = -2$. Inför $g(y) = f(-2, y) = 4 + 4y - 2y^2,\ -2 \le y \le 2$. Inre punkter, $g'(y) = 4 - 4y$ som är lika med noll då $y = 1$, $g(1) = 6$. Randpunkter: $g(-2) = -12$ och $g(2) = 4$.

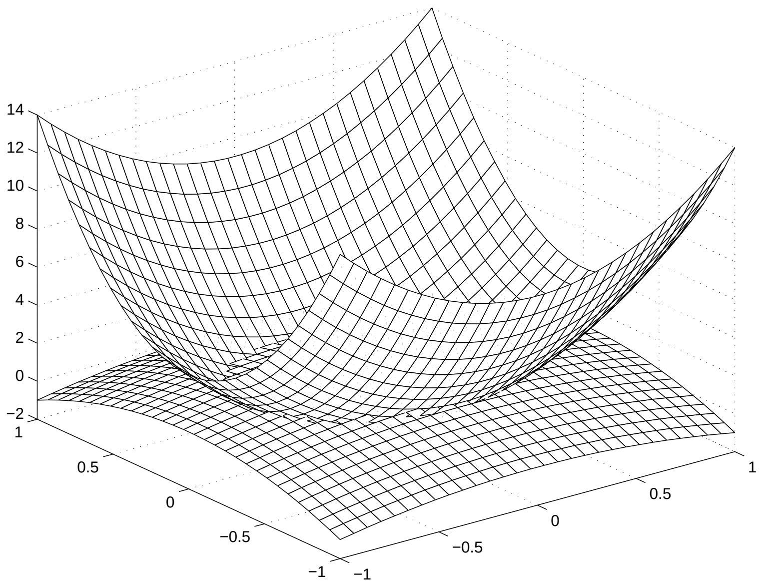
(b) $x = 2$. Inför $g(y) = f(2, y) = 4 - 4y + 2y^2,\ -2 \le y \le 2$. Inre punkter, $g'(y) = -4 + 4y$ som är lika med noll då $y = 1$, $g(1) = 2$. Randpunkter: $g(-2) = 20$ och $g(2) = 4$.

(c) $y = -2$. Inför $g(x) = f(x, -2) = x^2 + 8x,\ -2 \le x \le 2$. Inre punkter, $g'(x) = 2x + 8$ som är lika med noll då $x = -4$ som ligger utanför intervallet. Randpunkterna är redan avklarade.

(d) $y = 2$. Inför $g(x) = f(x, 2) = x^2,\ -2 \le x \le 2$. Inre punkter, $g'(x) = 2x$ som är lika med noll då $x = 0$, $g(0) = 0$. Randpunkterna är redan avklarade.

Vi har fått fram följande värden, $0, -1/4, 6, -12, 4, 20$, så att det största värdet är $f(2, -2) = 20$ och det minsta $f(-2, -2) = -12$.

6. Ytorna är två paraboloider, här en bild:



Vi bestämmer skärningskurvan i x-y-planet genom att sätta z-värdena lika:

$$2 - (x^2 + 2y^2) = 5x^2 + 10y^2 - 1 \Leftrightarrow 6x^2 + 12y^2 = 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 4y^2 = 1$$

Integrationsområdet ges av $D = \{\ (x, y)\ :\ 2x^2 + 4y^2 \le 1\ \}$. Vi inför elliptisk-polära koordinater $x = (r/\sqrt{2})\cos\varphi,\ y = (r/2)\sin\varphi,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$, där funktionaldeterminanten blir $r/\sqrt{8}$. Volymen kan alltså skrivas:

$$\iint_D 2 - (x^2 + 2y^2) - (5x^2 + 10y^2 - 1)\, dxdy = \iint_D 3 - (6x^2 + 12y^2)\, dxdy = 3 \iint_D 1 - (2x^2 + 4y^2)\, dxdy =$$

$$3\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1-r^2)r/\sqrt{8}\ \ d\varphi\right) dr = (6\pi/\sqrt{8})[r^2/2 - r^4/4]_0^1 = 3\pi/\sqrt{32}$$

7. Vi deriverar $f(u(x,y), v(x))$:

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v' = f'_u(-3y/x^4) + f'_v, \quad f'_y = f'_u u'_y = f'_u(1/x^3)$$

Vi sätter nu in detta i differentialekvationen och får:

$$x[f'_u(-3y/x^4) + f'_v] + 3yf'_u(1/x^3) = 4xy$$

vilket förenklas till $xf'_v = 4xy$ och $f'_v = 4y$ (eftersom $x > 0$). $y = uv^3$ i de nya variablerna, så vi får slutligen DE $f'_v = 4uv^3$. Detta ger $f = uv^4 + c(u)$ (c är en funktion av en variabel). Detta uttryckt i de ursprungliga variablerna blir slutligen:

$$f(x,y) = (y/x^3)x^4 + c(y/x^3) = xy + c(y/x^3)$$

8. Gränsvärdet i a) existerar och har värdet noll. Först ett intuitivt resonemang (som inte är ett bevis). För $x \approx 0, y \approx 0$ så är

$$\frac{\sin^2 x - \sin^2 y}{x-y} \approx \frac{x^2 - y^2}{x-y} = x + y$$

Nu till ett bevis där vi använder konjugatregeln samt det trigonometriska sambandet (se formelbladet):

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

så att

$$\frac{\sin^2 x - \sin^2 y}{x-y} = (\sin x + \sin y)\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{x-y} = (\sin x + \sin y)\cdot 2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-y}{2}}{(x-y)/2}$$

Den sista sinusdelen går, efter substitutionen $t = (x-y)/2$, över till standardgränsvärdet ett. Så gränsvärdet blir 0 (eftersom övriga ingående funktioner är kontinuerliga och gränsvärdena blir lika med motsvarande funktionsvärden).

Gränsvärdet i b) existerar inte. Man kan få ett intuitivt resonemang med polära koordinater t.ex:

$$\frac{z^2(x^2+y^2)}{\sin(xy)} \approx \frac{z^2(x^2+y^2)}{xy} = \frac{z^2\cdot r^2}{r^2\cos\varphi\sin\varphi} = \frac{2z^2}{\sin(2\varphi)}$$

som inte har gränsvärde (pga av beroendet av φ). Nu till ett riktigt bevis. Låt $z = 0$ och $(x,y)\to(0,0)$:

$$\frac{z^2(x^2+y^2)}{\sin(xy)} = \frac{0(x^2+y^2)}{\sin(xy)} = 0,\ \ (x,y)\to(0,0)$$

Låt nu $z = \sqrt{x}, x > 0, y = x^2$:

$$\frac{z^2(x^2+y^2)}{\sin(xy)} = \frac{x(x^2+x^4)}{\sin(x^3)} = \frac{x^3}{\sin(x^3)}\cdot(1+x^2) \to 1\cdot(1+0) = 1,\ \ x\to 0$$

Olika vägar mot origo kan alltså ge olika gränsvärden, varför gränsvärdet inte existerar.