Tentamen: Flervariabelmatematik Z2, MVE041, (MVE040), Chalmers, 2009-08-28, V

Skrivtid:	14.00-18.00.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@chalmers.se.
Vakt:	David Heintz, tel. 0762-721861.
	Frågor om tentamen kan ställas omkring 15.00 och 17.00.
Resultat:	Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Betygsgränser:	10, 15, 20 poäng av maximalt 25.
Lösningsförslag:	Måndag på www.
Hjälpmedel:	Inga, förutom bifogat formelblad.

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.
- Vektorer och matriser skrivs med **fetstil** och ej med tilde (˜).

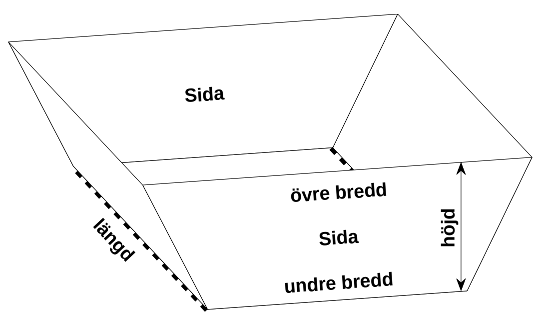
Kontrollera att Du skriver rätt flervariabel-tenta! Det kan gå flera samma dag.

1. Vi söker en kolonnvektor, $\mathbf{x}$, som satisfierar villkoren:

$$|\mathbf{x}| = 1 \text{ och } \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}} = 1, \text{ med } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ställ upp ett system av ekvationer, för problemet, och formulera sedan Newtons metod för detta system. Försök **inte** att lösa systemet för hand. (3p)

2. Vi vill tillverka en tvättbalja, **med lock**, i rostfri plåt, enligt skissen till höger. Baljan är tillverkad av två sidostycken (**Sida**), ortogonala mot botten, och en bockad rektangulär plåt (de streckade linjerna visar var plåten är bockad). Locket är inte utritat. Plåten är bockad lika mycket (samma vinkel) på varje sida. Baljan har plan botten. Vi vill maximera baljans volym under följande bivillkor.
Totala plåtarean får inte överstiga 2.7m^2. Längden får inte överstiga 1.2m. $0.3\text{m} \leq$ undre bredd $\leq$ övre bredd $\leq 0.65\text{m}$. $0.3\text{m} \leq$ höjd $\leq 0.45\text{m}$. Lockets area skall vara minst dubbelt så stor som bottenarean.



Använd `fmincon` för att lösa problemet (lös det **inte** för hand). `fmincon` kan ju lösa följande problem:

```
min f(x)
  LB <= x <= UB                     enkla gränser
  A * x  <= B,     Aeq * x = Beq    linjära bivillkor
  C(x)   <= 0,     Ceq(x)  = 0      ickelinjära bivillkor
```

Vi minns också funktionsprototyperna och anropet av `fmincon`:

```
function obj_val = obj_fun(x)  och  function [in_eq, eq] = constr_fun(x)
[x_opt, obj_val] = fmincon(@obj_fun, x_guess, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun)
```

a) Gör en matematisk formulering av problemställningen. Slarva inte med detaljerna. Tala i detalj om vilka variabler du använder, till exempel. **Om jag inte förstår vad du menar får du inga poäng!**
b) Skriv en Matlabkod som utnyttjar `fmincon` för att lösa problemet. Ditt program skall skriva ut de värden som behövs för att tillverka baljan. Du behöver **inte** skicka med `options`. (4p)

3. Avgör för varje kurva nedan om den utgör en parametrisering av en cirkel med moturs orientering (radie och centrum behöver inte vara samma för cirklarna). Det krävs att du motiverar varför det är en cirkel eller varför det inte är en cirkel.

$\gamma_1 : t \to (1 + 2\cos t, -3 + 2\sin t),\ t \in [0, 2\pi]$ $\quad$ $\gamma_2 : t \to (3\cos t^2, 3\sin t^2),\ t \in [0, \sqrt{2\pi}]$
$\gamma_3 : t \to (3 + 2t^2, 4 + 2t^2),\ t \in [0, \sqrt{2\pi}]$ $\quad$ $\gamma_4 : t \to (t, \sqrt{1 - t^2}),\ t \in [0, 1]$
$\gamma_5 : t \to (1 + 2\cos t, -3 + 4\sin t),\ t \in [0, 2\pi]$ $\quad$ $\gamma_6 : t \to (1 - t^2, t\sqrt{2 - t^2}),\ t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (3p)

4. Låt $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy - x + 2y - 1$. Vi befinner oss i **punkten** $(x, y) = (1, -1)$.
a) Bestäm den **riktning**, i (x, y)-planet, där f växer snabbast.
b) I vilka **riktningar** är f konstant (har nollderivata)?
c) Antag att vi bara kan röra oss utmed linjen $3x + y - 2 = 0$. I vilken **riktning** skall vi gå för att f skall avta? (3p)

5. Låt $f(x, y) = x^2 + 2xy + xy^2$. Beräkna funktionens stationära punkter och avgör vilka som är lokala extrempunkter och dessa punkters karaktär. (3p)

6. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna

$$z = 10 - x^2 - y^2 \text{ och } z = (x + 2)^2 + y^2 \qquad (3p)$$

7. Beräkna

$$\int_\gamma e^{y^2} - y^2 dx + 2xye^{y^2} + y^2\ dy$$

där γ består av linjestyckena från $(x, y) = (0, 0)$ till $(1, 1)$ och från $(1, 1)$ till $(0, 1)$. (3p)

8. Avgör för a) respektive b) nedan om gränsvärdet existerar och beräkna i så fall gränsvärdet.

$$\text{a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \sin y}{xy} \qquad \text{b)} \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{|x + y + z|}{\sqrt{x^2 + y^2 + x^2}}$$

(3p)