Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2009-01-10

1. Vektorn måste tydligen ha två element (annars är inte $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ och $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}$ definierade). Låt $\mathbf{x} = [a,\, b]^T$ (för att slippa en del index, naturligare vore x_1 och x_2). $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 1.4$ blir, efter lite räknande, $4a^2 + 4ab + 5b^2 = 1.4$ och $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = 0.2$ blir $a^2 - 2ab + 3b^2 = 0.2$. Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8a_k + 4b_k & 4a_k + 10b_k \\ 2a_k - 2b_k & -2a_k + 6b_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4a_k^2 + 4a_kb_k + 5b_k^2 - 1.4 \\ a_k^2 - 2a_kb_k + 3b_k^2 - 0.2 \end{bmatrix}$$

2. a) Inför L för längden, h för höjden, b_1 för undre bredd och b_2 för övre. Längden på den sneda "höjden", d ges av Pythagoras sats, $d^2 = h^2 + ((b_2 - b_1)/2)^2$. Sidoarean $S = (b_1 + b_2)h/2$, volymen $V = SL$ och totala plåtarean blir $A = 2S + b_1L + 2dL$ (sidoytor + botten + långsidor).

   b) Nu till Matlabkoden. Vi har fyra variabler, som vi placerar i en kolonnvektor: $x = [L, h, b_1, b_2]^T$. De enkla gränserna blir: `LB = [0 0.3 0.3 0.3]'` och `UB = [1.2 0.45 0.65 0.65]'`. Det linjära olikhetsbivillkoret på standardform lyder:

$$b_1 - b_2 \leq 0$$

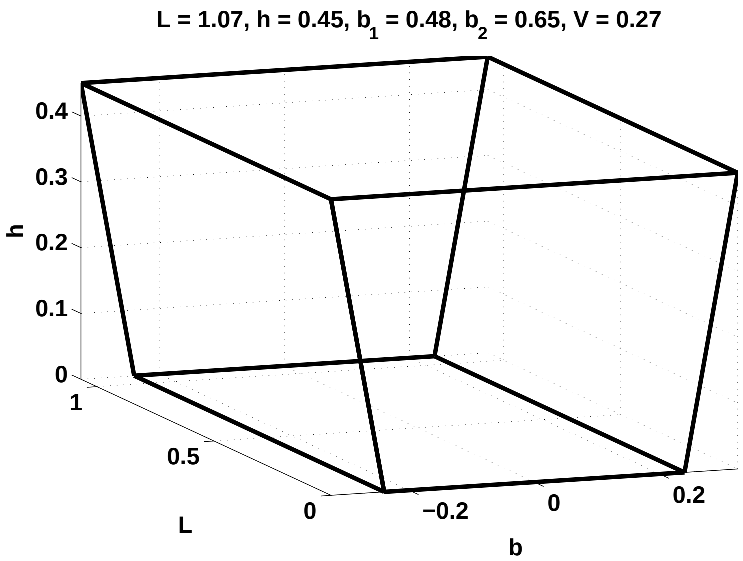
   De ickelinjära villkoret skrivs (där A är arean ovan):

$$A - 2 \leq 0$$

   Här följer koden, lite hoptryckt för att spara plats.

```
function balja
% Enkla gränser
LB = [0    0.3 0.3  0.3]';
UB = [1.2 0.45 0.65 0.65]';

% Linjära olikhetsbivillkor:
A = [0 0 1 -1];   B = 0;

Aeq = []; Beq = []; % Inga linjär likhetsbivillkor

x_guess = rand(4, 1);
[x_opt, obj_val] = fmincon(@obj_fun, x_guess, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun)

% Skriv ut värdena
L = x_opt(1), h = x_opt(2), b1 = x_opt(3), b2 = x_opt(4), vol = -obj_val

function obj_val = obj_fun(x)
L = x(1); h = x(2); b1 = x(3); b2 = x(4); % packa upp
S = (b1 + b2) * h * 0.5;

obj_val = -S * L;

function [in_eq, eq] = constr_fun(x)
L = x(1); h = x(2); b1 = x(3); b2 = x(4);  % packa upp
d = sqrt(h^2 + (0.5 * (b2 - b1))^2);
S = (b1 + b2) * h * 0.5;
A = 2 * S + L * (b1 + 2 * d);

in_eq = A - 2;
eq    = [];
```

Här är en bild som visar optimala utformningen:



3. Vi gör som i sadelytelabben. Ansätt en rät linje på parameterform:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha t \\ y = 1 + \beta t \\ z = 2 + \gamma t \end{cases}$$

(x, y, z) i ekvationen för ytan ger en polynomekvation i t, här är polynomet:

$$(1+\alpha t)^2 - (1+\beta t)^2 + 2(1+\alpha t)(1+\beta t) - (1+\alpha t) + 2(1+\beta t) - 1 - (2+\gamma t) = (\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta)t^2 + (3\alpha + 2\beta - \gamma)t$$

Polynomet skall vara noll för varje t vilket medför att koefficienterna måste vara noll, dvs.

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta = 0 \;\text{ och }\; 3\alpha + 2\beta - \gamma = 0$$

Låt oss välja α som parameter i lösningen till de två ekvationerna. β och γ kan då uttryckas i α. $\alpha = 0$ medför att $\beta = \gamma = 0$, vilket är orimligt, eftersom vi då inte får någon linje utan endast en punkt. Vi måste ta $\alpha \neq 0$, t.ex. $\alpha = 1$ (en multipel av en riktningsvektor är ju också en riktningsvektor). Vi får då

$$\beta = 1 \pm \sqrt{2}, \;\gamma = 3 + 2(1 \pm \sqrt{2}) = 5 \pm 2\sqrt{2}$$

De två linjerna kan alltså skrivas

$$t \to (1,1,2) + (1, 1+\sqrt{2}, 5+2\sqrt{2})\,t \;\text{ och }\; t \to (1,1,2) + (1, 1-\sqrt{2}, 5-2\sqrt{2})\,t$$

Notera att det inte är samma linje, eftersom riktningsvektorerna inte är parallella.

De ligger i tangentplanet (spänner till och med upp detta) eftersom linjerna är ortogonala mot gradienten, **g**, till ytan. Här är gradienten

$$\mathbf{g} = [2x + 2y - 1, \; -2y + 2x + 2, \; -1] \text{ och i } P, \; \mathbf{g} = [3, \; 2, \; -1]$$

som är ortogonal mot båda riktningsvektorerna. Detta är samma villkor (ingen slump) som att koefficienten, $3\alpha + 2\beta - \gamma$, framför t är noll.

4. Vi deriverar $f(u(x,y),v(x,y))$:

$$f'_x = f'_u \cdot (-2y/x^3) + f'_v \cdot 1, \quad f'_y = f'_u \cdot (1/x^2) + f'_v \cdot 0$$

Så differentialekvationen

$$xf'_x(x,y) + 2yf'_y(x,y) = 2x^2y^2$$

övergår i

$$x\left[(-2y/x^3)f'_u + f'_v\right] + 2y(1/x^2)f'_u = 2x^2y^2 \text{ eller } xf'_v = 2x^2y^2 \text{ eller } f'_v = 2xy^2$$

Vi uttrycker x, y i u, v:

$$x = v, \; y = x^2u = v^2u$$

Det nya högerledet, $2xy^2$, blir $2u^2v^5$ uttryckt i de nya variablerna. Vi får slutligen differentialekvationen $f'_v = 2u^2v^5$, som har lösningen $f = u^2v^6/3 + c(u)$ där c är en deriverbar funktion av en variabel. Slutligen går vi tillbaka till x och y och får

$$f(x,y) = x^2y^2/3 + c(y/x^2)$$

5. Eftersom $a > b > c$ så utgörs paraboloidens symmetriaxlar av koordinataxlarna. Rätblocket kan alltså beskrivas som

$$\{\,(X,Y,Z) \mid |X| \le x, \, |Y| \le y, \, |Z| \le z\,\}$$

och vi skall bestämma (x,y,z). Längden är $2x$, bredden $2y$ och höjden $2z$. Det måste gälla att (x,y,z) ligger på paraboloidens yta, annars skulle vi kunna öka volymen genom att öka en eller flera av x,y,z. Pga symmetrin räcker det att titta på (x,y,z) i första oktanten och vårt maximeringsproblem blir

$$\max_{x,y,z} xyz, \text{ med } 0 \le x, \; 0 \le y, \; 0 \le z \text{ och } x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

Området är kompakt och målfunktionen kontinuerlig, så det finns ett största värde. Låt oss använda Lagrangemultiplikatorer. Det skall gälla att målfunktionens och likhetsbivillkorets gradienter är parallella, vilket leder till att (där jag har bakat in tvåan, från derivatorena, i λ):

$$x/a^2 = \lambda yz, \; y/b^2 = \lambda xz, \; z/c^2 = \lambda xy$$

Eftersom $\lambda xyz \ne 0$ (annars får vi nollvolym) kan vi eliminera λ genom division (första/andra, första/tredje) och får

$$xb^2/(ya^2) = y/x \text{ och } xc^2/(za^2) = z/x \Rightarrow y^2 = x^2b^2/a^2 \text{ och } z^2 = x^2c^2/a^2$$

Om vi använder de två sista uttrycken tillsammans med bivillkoret får vi

$$x^2/a^2 + (x^2b^2/a^2)/b^2 + (x^2c^2/a^2)/c^2 = 1 \Rightarrow 3x^2/a^2 = 1 \Rightarrow x = a/\sqrt{3} \Rightarrow y = b/\sqrt{3} \text{ och } z = c/\sqrt{3}$$

Svar: De optimala kantlängderna är $2a/\sqrt{3}, 2b/\sqrt{3}, 2c/\sqrt{3}$ och den största volymen är produkten, $8abc/(3\sqrt{3})$. Kommentar: Den härledning som vi gjort fungerar även om inte $a > b > c$ är uppfyllt (men orienteringen av rätblocket behöver då inte vara entydigt bestämd). Så om $a = b = c = r$, har vi ett klot, så den största volymen är $8r^3/(3\sqrt{3})$, det optimala rätblocket är en kub (som kan roteras godtyckligt i klotet).

6. Ytorna är två paraboloider som innesluter en äggformad kropp. Vi bestämmer skärningskurvan i x-y-planet genom att sätta z-värdena lika och kvadratkomplettera:

$$15 - x^2 - (y-2)^2 = 3 + (x+2)^2 + y^2 \Leftrightarrow 8 - 2((x+1)^2 + (y-1)^2) = 0 \Leftrightarrow 4 = (x+1)^2 + (y-1)^2$$

Integrationsområdet ges av $D = \{\ (x,y)\ :\ (x+1)^2 + (y-1)^2 \le 4\ \}$. Vi inför polära koordinater $x = -1 + r\cos\varphi, \; y = 1 + r\sin\varphi, \; 0 \le r \le 2, \; 0 \le \varphi \le 2\pi$, där funktionaldeterminanten blir r. Volymen kan alltså skrivas:

$$\iint_D (15 - x^2 - (y-2)^2 - [3 + (x+2)^2 + y^2])\, dxdy = 2\iint_D 4 - (x+1)^2 - (y-1)^2 \, dxdy =$$

$$2\int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (4 - r^2)r \quad d\varphi \right) dr = 4\pi[2r^2 - r^4/4]_0^2 = 16\pi$$

7. Vi parametriserar kurvan genom

$$t \to (-t,\ t^2),\ -1 \le t \le 0$$

$$\int_\gamma xy\ dx + e^y\ dy = \int_{-1}^{0} (-t) \cdot t^2 \cdot (-1) + e^{t^2} 2t\ dt = \left[\frac{t^4}{4} + e^{t^2}\right]_{-1}^{0} = 1 - \frac{1}{4} - e = \frac{3}{4} - e$$

8. Gränsvärdet i a) existerar inte. Sätt $\mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Då gäller

$$\frac{|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^2 - x_n^2} = \frac{|\mathbf{y}|^2 + x_n^2}{|\mathbf{y}|^2} = 1 + \frac{x_n^2}{|\mathbf{y}|^2}$$

som kan anta godtyckliga värden. $x_n = 0$ ger gränsvärdet ett. $x_1 = x_n \neq 0$ och övriga $x_k = 0$ ger gränsvärdet två. Olika vägar mot origo kan alltså ge olika gränsvärden, varför gränsvärdet inte existerar.

Gränsvärdet i b) existerar och är noll. Använd elliptisk-polära koordinater, sätt $x = r\cos\varphi$, $y = (r/2)\sin\varphi$

$$\frac{xyz}{x^2 + 4y^2} = \frac{(r^2 \cos\varphi \sin\varphi)\, z}{2r^2} = (\cos\varphi \sin\varphi)\, z/2$$

$$0 \le |(\cos\varphi \sin\varphi)\, z| /2 \le |z|/2 \to 0, (x, y, z) \to (0, 0, 0)$$