Tentamen: Flervariabelmatematik Z2, MVE041, (MVE040), Chalmers, 2008-10-21, V

Skrivtid:	08.30-12.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@chalmers.se.
Vakt:	David Heintz, tel. 0762-721860. Frågor om tentamen kan ställas omkring 09.30 och 11.30.
Resultat:	Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Betygsgränser:	10, 15, 20 poäng av maximalt 25.
Lösningsförslag:	På www.
Hjälpmedel:	Inga, förutom bifogat formelblad.

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.
- Vektorer och matriser skrivs med **fetstil** och ej med tilde (˜).

Kontrollera att Du skriver rätt flervariabel-tenta! Det kan gå flera samma dag.

---

1. Vi söker en kolonnvektor, $\mathbf{x}$, som är normerad ($|\mathbf{x}| = 1$) och som satisfierar villkoret:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = 3.4, \text{ med } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ställ upp ett system av ekvationer, för problemet, och formulera sedan Newtons metod för detta system. Försök **inte** att lösa systemet för hand. (3p)

2. `fmincon`, som användes i lab3, kan ju lösa följande problem:

```
min f(x)
  LB <= x <= UB                        enkla gränser
  A * x  <= B,     Aeq * x = Beq       linjära bivillkor
  C(x)   <= 0,     Ceq(x)  = 0         ickelinjära bivillkor
```

Vi minns också funktionsprototyperna och anropet av `fmincon`:

```
function obj_val = obj_fun(x)  och  function [in_eq, eq] = constr_fun(x)
[x_opt, obj_val] = fmincon(@obj_fun, x_guess, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun)
```

Nu till problemet. Du har en kvadratisk gummiduk med sidlängd 1m och vill stansa (klippa) ut **tre lika stora** cirkelskivor ur duken. Vi vill ha så stora cirkelskivor som möjligt (dvs. få så lite spill som möjligt).
a) Gör en matematisk formulering av problemställningen. Slarva inte med detaljerna. **Om jag inte förstår vad du menar får du inga poäng på uppgiften!** Du kan utgå från att stansningen kan utföras exakt och utan att duken deformeras.
b) Skriv en Matlabkod som utnyttjar `fmincon` för att lösa problemet. Ditt program skall skriva ut de värden som behövs för att klippa ut de tre cirkelskivorna. Du behöver **inte** skicka med `options`. (4p)

Fortsättning på nästa sida!

3. Låt
$$f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - x + 2y - 1$$
Vi befinner oss i punkten $(x,y) = (1,1)$.
a) Bestäm den riktning, i (x,y)-planet, där f växer snabbast.
b) I vilka riktningar är f konstant (har nollderivata)?
c) Antag att vi bara kan röra oss utmed linjen $x + 3y - 4 = 0$. I vilken riktning skall vi gå för att f skall växa? (3p)

4. Lös differentialekvationen.
$$xf'_x(x,y) + 3yf'_y(x,y) = 4xy, \quad x > 0, \; y > 0$$
genom att införa de nya variablerna u och v definierade av
$$\begin{cases} u = y/x^3 \\ v = x \end{cases}$$
(3p)

5. Beräkna minsta och största värde av
$$f(x,y) = x^2y + y^3 - y$$
på området $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |x| \leq 1,\; |y| \leq 1\}$. (3p)

6. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna
$$2x^2 + y^2 = 1, \quad z = 2 - \cos(2x^2 + y^2) \;\text{ samt }\; z = 0 \qquad \text{(3p)}$$
och som innehåller punkten $(0,0,1/2)$.

7. Beräkna
$$\int_\gamma xy\; dx + y\; dy$$
där γ är den del av enhetscirkeln som ligger i första kvadranten och som börjar i $(1,0)$. (3p)

8. Avgör för a) respektive b) nedan om gränsvärdet existerar och beräkna i så fall gränsvärdet.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2}$ b) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z}$

(3p)

FORMELBLAD!!!!!!!!!!!!!!