Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2008-10-21

1. Vektorn måste tydligen ha två element (annars är inte $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ definierat). Låt $\mathbf{x} = [a,\, b]^T$ (för att slippa en del index, naturligare vore x_1 och x_2). $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 3.4$ blir, efter lite räknande, $4a^2 + 2ab + 3b^2 = 3.4$. $|\mathbf{x}| = 1$ kan skrivas $|\mathbf{x}|^2 = 1$ så att detta villkor blir $a^2 + b^2 = 1$. Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8a_k + 2b_k & 2a_k + 6b_k \\ 2a_k & 2b_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4a_k^2 + 2a_kb_k + 3b_k^2 - 3.4 \\ a_k^2 + b_k^2 - 1 \end{bmatrix}$$

2. a) Placera duken i ett koordinatsystem och låt dukens hörn vara $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ och $(0,1)$.
Låt (x_k, y_k), $k = 1, 2, 3$ vara centrum för skiva k och låt r vara radien (samma radie i alla tre). Vi vill maximera den sammanlagda arean, $3\pi r^2$ vilket vi kan göra genom att maximera r. Vi kommer att ha två typer av bivillkor. Den första typen ser till att ingen del av någon skiva hamnar utanför kvadraten (gummiduken) och den andra typen ser till att inte två skivor överlappar.

Bivillkoren blir

$$0 \le x_k - r,\ x_k + r \le 1,\ 0 \le y_k - r,\ y_k + r \le 1,\ k = 1, 2, 3$$

dvs. punkten längs till vänster på en skiva måste ligga i kvadraten (på eller till höger om dukens vänstra kant). Analogt för den högra delen av skivan. Motsvarande gäller i höjdled.

För att inte två skivor skall överlappa ser vi till att centrumavståndet mellan varje skiv-par är minst $2r$, dvs.

$$\sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2} \ge 2r,\ 1 \le j, k \le 3,\ j \ne k$$

b) Vi har sju variabler, som vi placerar i en kolonnvektor: $w = [x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, r]^T$.
De linjära olikhetsbivillkoren på standardform lyder:

$$r - x_k \le 0,\ x_k + r \le 1,\ r - y_k \le 0,\ y_k + r \le 1,\ k = 1, 2, 3$$

I Matlab-koden kommer först de tre $r - x_k \le 0$-villkoren etc. De ickelinjära villkoren skrivs

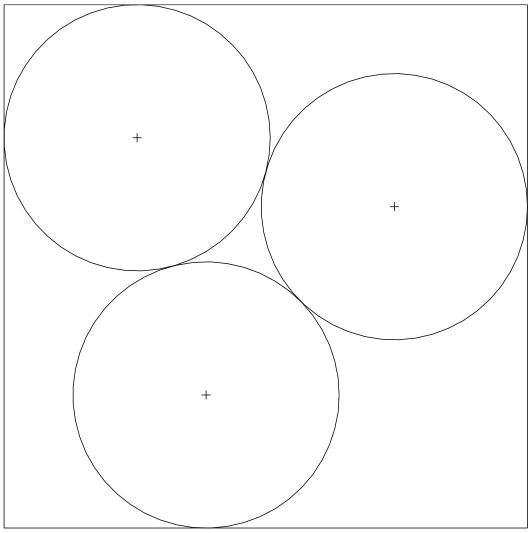
$$2r - \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2} \le 0,\ 1 \le j, k \le 3,\ j \ne k$$

Här följer koden, lite hoptryckt för att spara plats.

```
function packning
% Linjära olikhetsbivillkor:
I = eye(3);   Z = zeros(3);   e = ones(3, 1);   z = zeros(3, 1);
A = [-I Z e; I Z e; Z -I e; Z I e];
B = [z; e; z; e];

Aeq = []; Beq = [];
LB = zeros(7, 1);   UB = ones(7, 1);
w0 = rand(7, 1);  % startgissning

w = fmincon(@obj_fun, w0, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun);

% Skriv ut koordinater och radie
x = w(1:3),   y = w(4:6),   r = w(end)

function minus_r = obj_fun(w)
minus_r = -w(end);
```

```
function [in_eq, eq] = constr_fun(w)
x = w(1:3);  y = w(4:6);  r = w(end);
in_eq = 2 * r - [sqrt((x(1) - x(2))^2 + (y(1) - y(2))^2)
                 sqrt((x(1) - x(3))^2 + (y(1) - y(3))^2)
                 sqrt((x(2) - x(3))^2 + (y(2) - y(3))^2)];

eq = [];
```

Här är en bild som visar optimala placeringen:



3. a) f växer snabbast i gradientens riktning, $\nabla f(x,y) = (2x+2y-1, -2y+2x+2)$ och i punkten $(1,1)$ blir det $(3,2)$ (eller varje positiv multipel av denna).
b) f är lokalt konstant (har riktningsderivata noll) för riktningar som är ortogonala mot gradienten, dvs. riktningarna $\pm(-2,3)$.
c) En normalvektor till linjen är $(1,3)$ varför en normerad riktningsvektor är $\mathbf{v} = (-3,1)/\sqrt{5}$. Riktningsderivatan blir:

$$f'_{\mathbf{v}}(1,1) = (3,2)\cdot(-3,1)/\sqrt{5} = -7/\sqrt{5} < 0$$

Vi skall röra oss i motsatt riktningen, dvs. $(3,-1)$.

4. Vi deriverar $f(u(x,y), v(x,y))$:

$$f'_x = f'_u \cdot (-3y/x^4) + f'_v \cdot 1, \quad f'_y = f'_u \cdot (1/x^3) + f'_v \cdot 0$$

Så differentialekvationen

$$xf'_x(x,y) + 3yf'_y(x,y) = 4xy$$

övergår i

$$x\left[(-3y/x^4)f'_u + f'_v\right] + 3y(1/x^3)f'_u = 4xy \text{ eller } xf'_v = 4xy \text{ eller } f'_v = 4y$$

Högerledet, $4y$, blir $4uv^3$ uttryckt i de nya variablerna. Vi får slutligen differentialekvationen $f'_v = 4uv^3$, som har lösningen $f = uv^4 + c(u)$ där c är en deriverbar funktion av en variabel. Slutligen går vi tillbaka till x och y och får

$$f(x,y) = xy + c(y/x^3)$$

5. Området är kompakt och funktionen kontinuerlig, alltså har funktionen största och minsta värde på området. Vi undersöker först inre punkter där gradienten är lika med nollvektorn. Ekvationerna blir grad $f(x,y) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (2xy,\ x^2+3y^2-1) = (0,0)$. Den första ekvationen ger $x=0$ eller $y=0$. $x=0$ i den andra ekvationen ger $3y^2-1=0$ så att $y=\pm\sqrt{1/3}$. $y=0$ i den andra ekvationen ger $x=\pm1$. Vi har alltså hitta punkterna $(0,\pm\sqrt{1/3})$ samt $(\pm1,0)$. Motsvarande funktionsvärden är

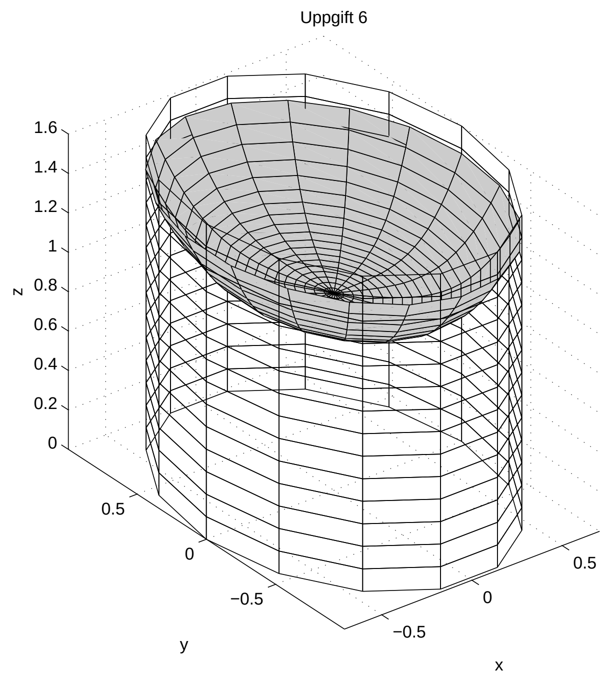
$$f\left(0,\pm\sqrt{1/3}\right) = \pm\frac{2\sqrt{3}}{9} \approx \pm0.38,\ f(\pm1,0)=0$$

Nu till randen. Vi börjar med $x=\pm1,\ -1\le y\le 1$ och noterar att f har samma värden på dessa ränder. $f(\pm1,y)=y^3$. Vår envariabelkunskap ger direkt att endast randpunkterna (för y) är aktuella. $f(\pm1,-1)=-1$ och $f(\pm1,1)=1$.

Nu till $-1\le x\le 1,\ y=-1$ där $f(x,-1)=-x^2$ som har minsta värde -1 och största 0 på intervallet. Slutligen $-1\le x\le 1,\ y=1$ där $f(x,1)=x^2$ som har minsta värde 0 och största 1 på intervallet.

Svar: minsta värde är -1 och största är 1.

6. $2x^2+y^2=1$ är en cylinder med elliptiskt tvärsnitt. $z=2-\cos(2x^2+y^2)$ liknar kopp. Här en bild, där (en del av) cylindern är ritad med ett rutnät:



Integrationsområdet ges av $D = \{\ (x,y)\ :\ 2x^2+y^2\le1\ \}$. Vi inför elliptisk-polära koordinater, $x=(1/\sqrt{2})\ r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ 0\le r\le1,\ 0\le\varphi\le2\pi$. Volymen, V, kan alltså skrivas (där $r/\sqrt{2}$ är funktionaldeterminanten):

$$\iint_D (2-\cos(2x^2+y^2))\ dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (2-\cos(r^2))\ r/\sqrt{2}\ \ d\varphi\right) dr$$

$$\pi\sqrt{2}\int_0^1 2r - r\cos(r^2)\ dr = \pi\sqrt{2}\left[r^2-\frac{\sin(r^2)}{2}\right]_0^1 = \pi\sqrt{2}\left(1-\frac{\sin 1}{2}\right)$$

7. Kurvan har positiv orientering. Vi parametriserar kurvan genom

$$t \to (\cos t,\ \sin t),\ 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$\int_\gamma xy\ dx + y\ dy = \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t(-\sin t) + \sin t \cos t\ dt$$

$$\left[-\frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

8. Gränsvärdet i a) existerar och är noll. Använd instängning och följande standardolikhet, $|xy| \leq (x^2 + y^2)/2$.

$$0 \leq \left|\frac{xyz}{x^2+y^2}\right| = \frac{|xy|\,|z|}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)\,|z|}{2(x^2+y^2)} = \frac{|z|}{2} \to 0, (x, y, z) \to (0, 0, 0)$$

Standardolikheten följer av följande:

$$0 \leq (|x| - |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x|\,|y| = x^2 + y^2 - 2|xy|$$

Gränsvärdet i b) existerar inte, ty tag $x = y$ och $z = \alpha x^4 - 2x^2$, $\alpha \neq 0$, då är

$$\frac{xyz}{x^2+y^2+z} = \frac{x^2(\alpha x^4 - 2x^2)}{2x^2 + \alpha x^4 - 2x^2} = \frac{\alpha x^6 - 2x^4}{\alpha x^4} = x^2 - \frac{2}{\alpha} \to -\frac{2}{\alpha}$$

som beror av α. Olika vägar mot origo kan alltså ge olika gränsvärden, varför gränsvärdet inte existerar.