Thomas Ericsson
Matematik, Chalmers/GU

Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2008-08-29

1. Systemet blir

$$\begin{cases} 2x + \cos(x+y+z) = 0 \\ 2y + \cos(x+y+z) = 0 \\ 2z + \cos(x+y+z) = 0 \end{cases}$$

Låt $\sigma = \sin(x_k + y_k + z_k)$ och låt $\mathbf{E}$ beteckna 3×3-matrisen av ettor. Då kan Newtons metod skrivas:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} - [2\mathbf{I} - \sigma\mathbf{E}]^{-1} \begin{bmatrix} 2x_k + \cos(x_k + y_k + z_k) \\ 2y_k + \cos(x_k + y_k + z_k) \\ 2z_k + \cos(x_k + y_k + z_k) \end{bmatrix}$$

2. Jag har paketerat längd, bredd, höjd i vektorn x.

```
function ovn2
% x innehåller längd, bredd och höjd i någon ordning

LB = 0.3;
UB = 0.6 * ones(3, 1);

A  = [1 1 1; 2 2 0; 2 0 2; 0 2 2];
B  = [ 1.2;     1;      1;    1];
Aeq = []; Beq = [];

x_guess = [0.3; 0.1; 0.1];

[x_opt, obj_val] = fmincon(@obj_fun, x_guess, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun)

err1 = A * x_opt - B
[err2, junk] = constr_fun(x_opt)

function obj_val = obj_fun(x)
obj_val = -prod(x);

function [in_eq, eq] = constr_fun(x)
in_eq(1) = x(1)*x(2) - 0.3;
in_eq(2) = x(1)*x(3) - 0.3;
in_eq(3) = x(2)*x(3) - 0.3;
eq    = [];
```

3. Om punkten skrivs (a, b, c) ges tangentplanet (i punkten) av:

$$(b^2 + 1)(x - a) + 2ab(y - b) - 2c(z - c) = 0$$

En normalvektor till planet är därför $(b^2 + 1, 2ab, -2c)$. Denna skall vara parallell med det givna planets normalvektor, $(1, 0, -1)$. Det skall alltså existera $\lambda \neq 0$ så att

$$(b^2 + 1, 2ab, -2c) = \lambda(1, 0, -1)$$

Så, $\lambda = 2c$ (från z-komponenten) vilket ger ekvationerna $b^2 + 1 = 2c$ och $2ab = 0$. Den andra ekvationen ger $a = 0$ eller $b = 0$. Dessutom skall (a, b, c) satisfiera ytans ekvation, så att $a(b^2 + 1) - c^2 + 1 = 0$.
Vi studerar först fallet $a = 0$ och får ekvationerna $b^2 + 1 = 2c$ och $-c^2 + 1 = 0$ så att $c = 1$ ($c = -1$ ej

möjlig) och $b = \pm 1$.
Nu till $b = 0$. Ekvationerna blir $1 = 2c$ och $a - c^2 + 1 = 0$, så att $c = 1/2$ och $a = -3/4$.
De sökta punkterna är därför $(0, \pm 1, 1)$ samt $(-3/4, 0, 1/2)$.

4. Vi deriverar $f(u(x,y), v(x,y))$:

$$f'_x = f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot 1 = f'_u + f'_v, \quad f'_y = f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot (-1) = f'_u - f'_v$$

Så differentialekvationen

$$f'_x(x,y) + f'_y(x,y) = x - y$$

övergår i

$$f'_u + f'_v + f'_u - f'_v = v$$

eftersom $v = x - y$. Vi får slutligen differentialekvationen $2f'_u = v$, som har lösningen $f = uv/2 + c(v)$ där c är en funktion som svarar mot integrationskonstanten. Slutligen går vi tillbaka till x och y och får

$$f(x,y) = (x+y)(x-y)/2 + c(x-y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + c(x-y)$$

Villkoret $f(x,0) = 2e^x$ ger

$$\frac{x^2}{2} + c(x) = 2e^x$$

så att $c(x) = 2e^x - x^2/2$. Den speciella lösningen blir (notera att c beror av $x - y$) alltså:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + 2e^{x-y} - \frac{(x-y)^2}{2} = xy - y^2 + 2e^{x-y}$$

5. Området är kompakt och funktionen kontinuerlig, alltså har funktionen största och minsta värde på området. Vi undersöker först inre punkter där gradienten är lika med nollvektorn. Eftersom $\nabla f = (y - 1, x)$, så är enda stationära punkten $(x,y) = (0,1)$, som är en randpunkt (kommer nedan).

Nu till randen. Först den del där $x = 0$, $-1 \le y \le 1$. Eftersom $f(0,y) = 0$ är största och minsta värde noll på hela denna del av randen. Nu till cirkelbågen, där $x = \sqrt{1-y^2}$, $-1 \le y \le 1$. Beteckna f på randen med $r(y)$, då är

$$r(y) = \sqrt{1-y^2}\,(y-1)$$

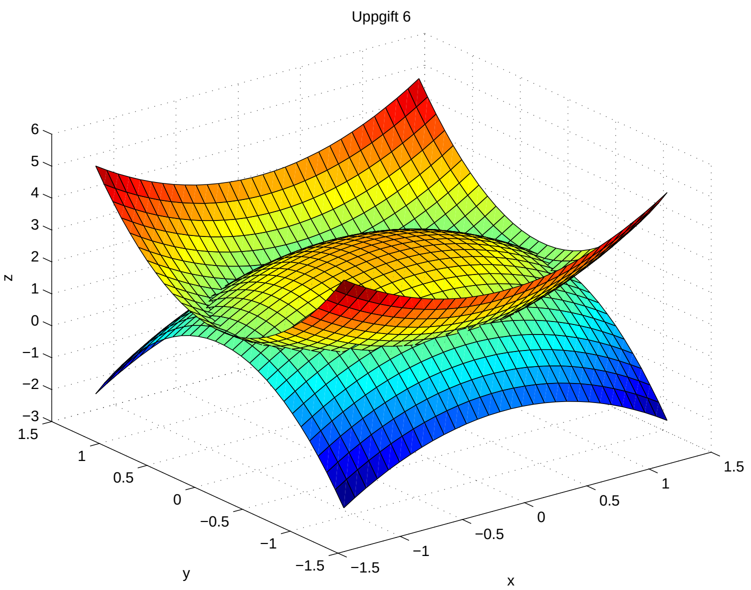
Vi söker nu största och minsta värde till $r(y)$ då $|y| \le 1$. Inre punkter:

$$r'(y) = \cdots = -\frac{2y^2 - y - 1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Den enda inre punkt där derivatan är noll är $y = -1/2$, $r(-1/2) = -3^{3/2}/4 \approx -1.3$. På randen, $y = \pm 1$ är r noll.

Minsta värde är $-3^{3/2}/4$ och största är 0.

6. $z = x^2 + 2y^2$ är en paraboloid (en "kopp") och $z = 3 - (x^2 + 2y^2)$ är en uppochnedvänd kopp, volymen är äggformad. Här en bild:



Projektionen av skärningskurvan, i x-y-planet, ges av:

$$x^2 + 2y^2 = 3 - (x^2 + 2y^2) \Rightarrow (2/3)x^2 + (4/3)y^2 = 1$$

Integrationsområdet ges av $D = \{\ (x, y)\ :\ (2/3)x^2 + (4/3)y^2 \le 1\ \}$. Vi inför elliptisk-polära koordinater, $x = \sqrt{3/2}\ r\cos\varphi,\ \ y = \sqrt{3/4}\ r\sin\varphi,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$. Volymen, V, kan alltså skrivas (där $\sqrt{3/2} \cdot \sqrt{3/4} \cdot r$ är funktionaldeterminanten):

$$\iint_D 3 - (x^2 + 2y^2) - (x^2 + 2y^2)\ dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 3(1 - r^2)\sqrt{3/2} \cdot \sqrt{3/4} \cdot r\ d\varphi \right) dr =$$

$$2\pi \frac{3 \cdot 3}{2\sqrt{2}} \int_0^1 r - r^3\ dr = \frac{9\pi}{\sqrt{2}} \left[r^2/2 - r^4/4 \right]_0^1 = \frac{9\pi}{4\sqrt{2}}$$

7. Vi använder Greens formel t.ex (notera den negativa orienteringen hos kurvan), med $D = \{(x, y)\ :\ 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 2 - y\}$, och får

$$-\int_\gamma x^2 - xy\ dx + xy - y^2\ dy = \iint_D y - (-x) dxdy = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} x + y\ dx \right) dy =$$

$$\int_0^1 \left[x^2/2 + xy \right]_{x=y}^{x=2-y}\ dy = \int_0^1 ((2 - y)^2 - y^2)/2 + (2 - 2y)y\ dy = \cdots = 4/3$$

Så, svaret är $-4/3$ (tänk på orienteringen).

8. Om funktionen skall bli kontinuerlig i origo måste

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$$

existera. Om det existerar, säg att gränsvärdet är λ, så definierar vi $f(0, 0) = \lambda$. Om gränsvärdet inte existerar så kan vi inte göra funktionen kontinuerlig. Så frågan är alltså om gränsvärdet existerar.

Jag påstår att det inte existerar. Vi tar först $y = 0$. Det gäller att $f(x, 0) = 0$ varför gränsvärdet är noll. Vi testar sedan att närma oss origo utmed linjen $y = x$:

$$f(x,y) = \frac{\sin^4 x}{1-\cos(2x^2)} = \frac{\sin^4 x}{2\sin^2(x^2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^4 x}{x^4} \cdot \frac{x^4}{\sin^2(x^2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin x}{x}\right]^4 \left[\frac{x^2}{\sin(x^2)}\right]^2$$

som har gränsvärdet $1/2$ när $x \to 0$ (använd standardgränsvärden och de vanliga satserna). Man kan alternativt använda Taylorutveckling (här skissartat, $\sin^4 x \approx x^4$ och $2\sin^2(x^2) \approx 2x^4$, så kvoten uppför sig som $1/2$) eller l'Hospitals regel (se Adams sid. 266). Vi får alltså olika gränsvärden beroende på hur vi närmar oss origo. Gränsvärdet, λ, existerar därmed inte och vi kan inte definiera $f(0, 0)$ så att f blir kontinuerlig i origo.