Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2001-01-19

1. Gradienten blir $[y^2 + y\cos(xy), 2xy + x\cos(xy)]$, varför Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - \mathbf{J}(x_k, y_k)^{-1} \begin{bmatrix} y_k^2 + y_k\cos(x_k y_k) \\ 2x_k y_k + x_k\cos(x_k y_k) \end{bmatrix}$$

där

$$\mathbf{J}(x_k, y_k) = \begin{bmatrix} -y_k^2\sin(x_k y_k) & 2y_k + \cos(x_k y_k) - x_k y_k \sin(x_k y_k) \\ 2y_k + \cos(x_k y_k) - x_k y_k \sin(x_k y_k) & 2x_k - x_k^2 \sin(x_k y_k) \end{bmatrix}$$

2. Jag har paketerat längd, bredd, höjd i vektorn x.

```
function ovn2
% x = [längd, bredd, höjd]'

LB = [0.3; 0; 0];
UB = 0.5 * ones(3, 1);

A  = [1 1 1; 2 2 0; 2 0 2; 0 2 2];
B  = [ 0.65;     1;      1;    1];
Aeq = []; Beq = [];

x_guess = [0.3; 0.1; 0.1];

[x_opt, obj_val] = fmincon(@obj_fun, x_guess, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun)

err1 = A * x_opt - B
[err2, junk] = constr_fun(x_opt)

function obj_val = obj_fun(x)
obj_val = -prod(x);

function [in_eq, eq] = constr_fun(x)
in_eq = 2*(x(1)*x(2) + x(1)*x(3) + x(2)*x(3)) - 0.3
eq    = [];
```

3. Enhetssfären ges av $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Om punkten P skrivs (a, b, c) ges tangentplanet (i P) av:

$$2a(x-a) + 2b(y-b) + 2c(z-c) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2$$

Punkten P ligger ju på enhetssfären, så att $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ och planet ges alltså av $ax + by + cz = 1$. Nu ligger ju $(x, y, z) = (2, 0, 0)$ samt $(x, y, z) = (0, 4, 0)$ i planet vilket medför att $2a = 1$ och $4b = 1$ så att $a = 1/2,\ b = 1/4$. Eftersom $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ blir $c^2 = 1 - 1/4 - 1/16$ så att $c = \pm\sqrt{11}/4$. Tänkbara punkter P är således $(2, 1, -\sqrt{11})/4$ samt $(2, 1, \sqrt{11})/4$.

4. Vi deriverar $f(u(x, y), v(x, y))$:

$$f'_x = f'_u \cdot e^y + f'_v \cdot 0 = e^y f'_u, \quad f''_{xx} = e^y f''_{uu} \cdot e^y + f''_{uv} \cdot 0 = e^{2y} f''_{uu}$$

$$f''_{xy} = e^y f'_u + e^y (f''_{uu} \cdot xe^y + f''_{uv} \cdot 1) = e^y f'_u + xe^{2y} f''_{uu} + e^y f''_{uv}$$

Så differentialekvationen

$$x f''_{xx}(x, y) - f''_{xy}(x, y) + f'_x(x, y) = xe^{2y}$$

övergår i

$$xe^{2y}f''_{uu} - \left[e^y f'_u + xe^{2y}f''_{uu} + e^y f''_{uv}\right] + e^y f'_u = xe^{2y} \quad \Leftrightarrow \quad -e^y f''_{uv} = xe^{2y}$$

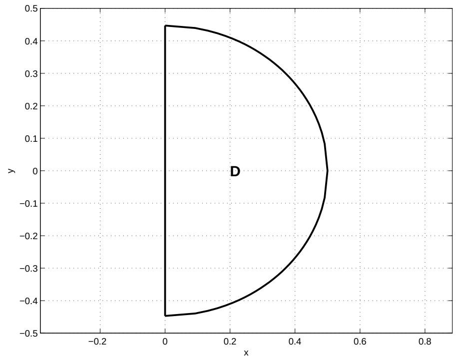
Eftersom $u = xe^y$ får vi slutligen differentialekvationen $f''_{uv} = -u$. Ekvationen är enkel att lösa, det gäller att (c och c_2 är funktioner som svarar mot integrationskonstanter och c_1 är en primitiv funktion till c)

$$f'_u = -uv + c(u), \quad f = -u^2v/2 + c_1(u) + c_2(v)$$

Slutligen går vi tillbaka till x och y och får

$$f(x,y) = -\frac{1}{2}x^2ye^{2y} + c_1(xe^y) + c_2(y)$$

5. $4x^2 + 5y^2 = 1$ är en ellips och $x \geq 0$ är högra halvplanet. I följande bild har jag ritat områdets rand (D markerar området).



Området är kompakt och funktionen kontinuerlig, alltså har funktionen största och minsta värde på området. Vi undersöker först inre punkter där gradienten är lika med nollvektorn. Eftersom $\nabla f = (8x+1, 10y+1)$, så är enda stationära punkten $(x,y) = (-1/8, -1/10)$, som inte tillhör området.

Nu till randen. Först den del där $x = 0$, $-1/\sqrt{5} \leq y \leq 1/\sqrt{5}$. Låt $r(y) = f(0,y) = 5y^2 + y$. Vi skall alltså söka min/max av r när $-1/\sqrt{5} \leq y \leq 1/\sqrt{5}$. Inre punkter: $r'(y) = 0 \Rightarrow 10y = -1$ så att $y = -1/10$, som tillhör området. $\boxed{r(-1/10) = 5/100 - 1/10 = -1/20}$.
Randpunkter: $\boxed{r(-1/\sqrt{5}) = 1 - 1/\sqrt{5} \approx 0.55}$, $\boxed{r(1/\sqrt{5}) = 1 + 1/\sqrt{5} \approx 1.45}$.

Nu till ellipsbågen. Vi betraktar bågen som likhetsbivillkoret $g(x,y) = 0$ med $g(x,y) = 4x^2 + 5y^2 - 1$. Vi har redan undersökt randen (samma som ändpunkterna i föregående fall) och ser på inre punkter. Vi använder Lagrangemultiplikatorer och kräver att determinanten, av matrisen med gradienterna som rader, skall vara noll.

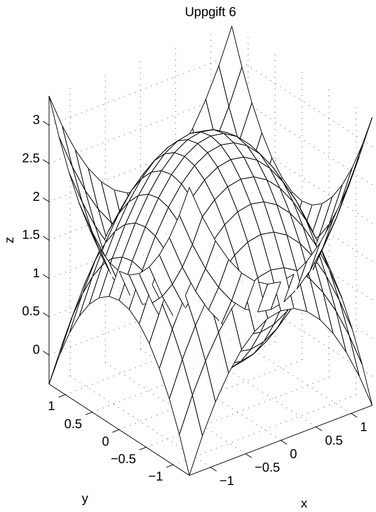
$$\det \begin{bmatrix} \nabla f(x,y) \\ \nabla g(x,y) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 8x+1 & 10y+1 \\ 8x & 10y \end{bmatrix} = (8x+1)\ 10y - 8x\ (10y+1) = 10y - 8x$$

så att $y = 4x/5$. Detta i bivillkoret ger

$$4x^2 + 5(16/25)x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}/6$$

$x = -\sqrt{5}/6$ tillhör inte området, $\boxed{f(\sqrt{5}/6,\ (4/5)\sqrt{5}/6) = 1 + 3\sqrt{5}/10 \approx 1.67}$. Minsta värde är $-1/20$ och största är $1 + 3\sqrt{5}/10$.

6. $z = x^2 + y^2$ är en paraboloid (en “kopp”) och $z = 3 - (x^2 + y^2)$ är en uppochnedvänd kopp, volymen är äggformad. Här en bild:



Projektionen av skärningskurvan, i x-y-planet, ges av:

$$x^2 + y^2 = 3 - (x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 = 3/2$$

Integrationsområdet ges av $D = \{\ (x, y)\ :\ x^2 + y^2 \leq 3/2\ \}$. Vi inför polära koordinater, $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0 \leq r \leq \sqrt{3/2},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Volymen, V, kan alltså skrivas (det sista r-et är funktionaldeterminanten):

$$\iint_D 3 - (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)\ dxdy = \int_0^{\sqrt{3/2}} \left(\int_0^{2\pi} (3 - 2r^2) r\ d\varphi \right) dr =$$

$$2\pi \int_0^{\sqrt{3/2}} 3r - 2r^3\ dr = 2\pi \left[3r^2/2 - r^4/2 \right]_0^{\sqrt{3/2}} = \frac{9\pi}{4}$$

7. Vi använder Greens formel t.ex (notera den negativa orienteringen hos kurvan), med $D = \{(x, y)\ :\ 1 \leq x, y \leq 2\ \}$, och får

$$\int_\gamma xye^x\ dx + xy\sin y\ dy = -\iint_D y\sin y - xe^x\ dxdy = -\left[\int_1^2 \left(\int_1^2 y\sin y\ dx \right) dy - \int_1^2 \left(\int_1^2 xe^x\ dy \right) dx \right] =$$

$$-\left[\int_1^2 y\sin y\ dx - \int_1^2 xe^x\ dy \right] = -\left[[-y\cos y]_1^2 - \int_1^2 -\cos y\ dy - \left([xe^x]_1^2 - \int_1^2 e^x\ dx \right) \right] =$$

$$-\left[-2\cos 2 + \cos 1 - 2e^2 + e + [\sin y]_1^2 + [e^x]_1^2 \right] = -\left[-2\cos 2 + \cos 1 - 2e^2 + e + \sin 2 - \sin 1 + e^2 - e \right] =$$

$$-\cos 1 + 2\cos 2 - \sin 2 + \sin 1 + e^2$$

där partiell integration används för $y\sin y$ samt xe^x.

8. Först ett intuitivt resonemang (som inte utgör något bevis). Om både m och n är jämna kommer nämnaren att vara positiv för alla $(x, y) \neq (0, 0)$ och eftersom täljaren innehåller högre potenser än nämnaren torde täljaren gå snabbare mot noll än nämnaren. Gränsvärdet existerar nog och är nog lika med noll.

   Om minst en av m och n är udda kan man rimligtvis göra nämnaren noll (eller nästan noll) fastän $(x, y) \neq (0, 0)$. Man borde kunna få nämnaren att gå mot noll i samma takt som täljaren (eller snabbare eller långsammare). Så, beroende på hur x och y går mot noll kan man få olika värden på kvoten, gränsvärdet existerar då inte.

Nu till riktiga bevis av ovanstående.
Antag att både m och n är jämna.

$$0 \le \frac{x^m y^n}{x^m + y^n} \le \frac{x^m y^n}{x^m} = y^n \text{ om } x \neq 0, \qquad 0 \le \frac{x^m y^n}{x^m + y^n} \le \frac{x^m y^n}{y^n} = x^m \text{ om } y \neq 0$$

Antag att $|x|, |y| \le 1$ och att $(x, y) \neq (0, 0)$, då gäller att

$$0 \le \frac{x^m y^n}{x^m + y^n} \le \max(x^m, y^n) \le \max(|x|, |y|)^{\min(m,n)}$$

Detta uttryck går mot noll när $(x, y) \to (0, 0)$. Instängningssatsen ger slutligen gränsvärdet noll.

Antag nu att minst en av m och n är udda. Vi kan anta att n är udda (detta utgör ingen inskränkning eftersom uttrycket är symmetriskt i x, m respektive y, n). Låt $t > 0$ och $k < 0$ och sätt $x = ((1 - kt)t)^{1/m}$ och $y = -t^{1/n}$. Vi får då

$$\frac{x^m y^n}{x^m + y^n} = \frac{(1 - kt)t \cdot (-t)}{(1 - kt)t + (-t)} = \frac{-(1 - kt)t^2}{-kt^2} = \frac{1}{k} - t \to \frac{1}{k}, \ t \to 0$$

som kan anta oändligt många värden, så gränsvärdet existerar inte.