Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2007-10-22

1.

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_kc_k & a_kc_k & a_kb_k \\ 2a_k & 2b_k & 2c_k \\ 4a_k^3 & 4b_k^3 & 4c_k^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_kb_kc_k - 1 \\ a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 - 4 \\ a_k^4 + b_k^4 + c_k^4 - 8 \end{bmatrix}$$

2. Jag har paketerat längd, bredd, höjd i vektorn x. Vi får som vanligt kasta om ordningen på villkor som "summan av längd och bredd vara minst 0.5 m". $x_1 + x_2 \geq 0.5$ blir ju $-x_1 - x_2 \leq -0.5$ (analogt för summan av längd och höjd).

```
function ovn2
% x = [längd, bredd, höjd]'

LB = zeros(3, 1);
UB = ones(3, 1);
A  = [-1 -1 0; 1 1 0; -1 0 -1; 1 0 1];
B  = [   -0.5;    1.8;   -1.25;    1.5];
Aeq = []; Beq = [];
x_guess = 0.5 * ones(3, 1);

[x_opt, obj_val] = fmincon(@obj_fun, x_guess, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun)

function obj_val = obj_fun(x)
obj_val = -prod(x);

function [in_eq, eq] = constr_fun(x)
in_eq = 1.4 - sqrt(sum(x.^2));
eq    = [];
```

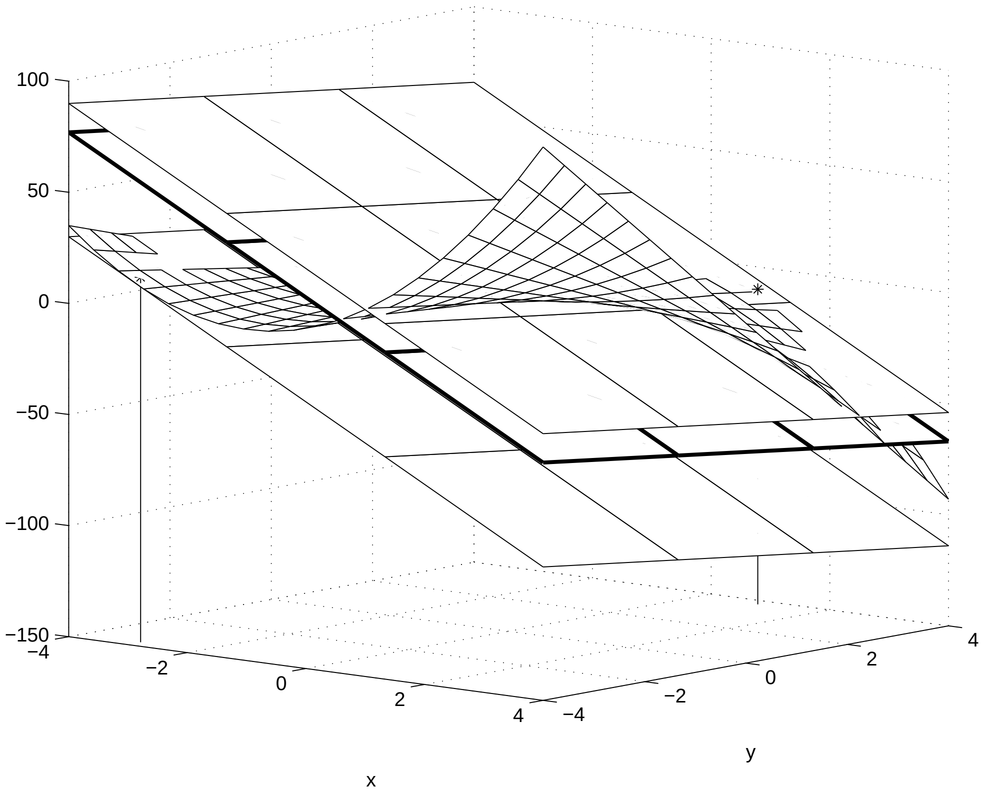
3. Tangentplanet, till ytan, i en godtycklig punkt, (a, b, c), kan skrivas:

$$(2ab + 2b)(x - a) + (a^2 + 2a)(y - b) + 1 \cdot (z - c) = 0$$

Planet har alltså en normalvektor $(2ab + 2b, a^2 + 2a, 1)$. Om två plan är parallella så måste deras normalvektorer också vara parallella. Det existerar således ett $\lambda \in \mathbb{R}$ så att:

$$(2ab + 2b, a^2 + 2a, 1) = \lambda \ (15, 3, 1)$$

vilket ger (se på z-komponenterna) att $\lambda = 1$. Alltså gäller att $2ab + 2b = 15, a^2 + 2a = 3$. Den andra ekvationen har rötterna $a = 1, a = -3$ vilket i den första ekvationen ger $b = 15/4$ respektive $b = -15/4$. Detta ger $c = -33/4$ respektive $c = 57/4$. Så svar, punkterna är $(1, 15/4, -33/4)$ samt $(-3, -15/4, 57/4)$. Här är en bild. Det givna planet är ritat med tjocka linjer och de två tangentplanen med tunna. Punkterna är markerade med vertikal streck upp till kryss ytan.



4. Det gäller att $u = x - \alpha y,\ v = y$. Derivera $f(u(x, y), v(y))$, vilket ger

$$f'_x = f'_u \cdot 1, \quad f'_y = f'_u(-\alpha) + f'_v \cdot 1$$

så att vänsterledet i DE blir

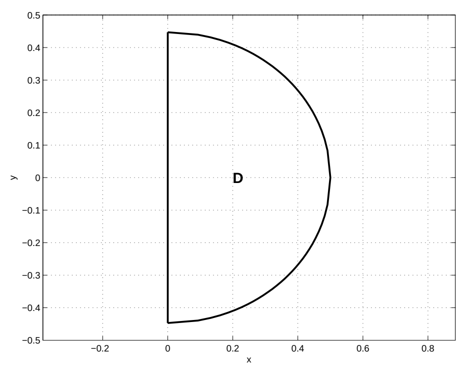
$$2f'_x + 3f'_y = 2f'_u + 3(-\alpha)f'_u + 3f'_v = (2 - 3\alpha)f'_u + 3f'_v$$

Högerledet blir

$$18x + 3y = 18(u + \alpha v) + 3v = 18u + (3 + 18\alpha)v$$

Tag $\alpha = 2/3$, vilket ger DE $3f'_v = 18u + 15v$ eller $f'_v = 6u + 5v$, som har lösningen $f(u, v) = 6uv + 5v^2/2 + g(u)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion av en variabel. Lösningen blir slutligen $f(x, y) = 6(x - 2y/3)y + 5y^2/2 + g(x - 2y/3) = 6xy - 3y^2/2 + g(x - 2y/3)$.

5. $4x^2 + 5y^2 = 1$ är en ellips och $x \geq 0$ är högra halvplanet. I följande bild har jag ritat områdets rand (D markerar området).



Området är kompakt och funktionen kontinuerlig, alltså har funktionen största och minsta värde på området. Vi undersöker först inre punkter där gradienten är lika med nollvektorn. Eftersom $\nabla f = (8x+4, 10y+5)$, så är enda stationära punkten $(x, y) = (-1/2, -1/2)$, som inte tillhör området.

Vi undersöker nu randen. Först den del där $x = 0$, $-1/\sqrt{5} \le y \le 1/\sqrt{5}$. Låt $r(y) = f(0, y) = 5y^2 + 5y$. Vi skall alltså söka min/max av r när $-1/\sqrt{5} \le y \le 1/\sqrt{5}$. Inre punkter: $r'(y) = 0 \Rightarrow 10y = -5$ så att $y = -1/2$, som inte tillhör området. Randpunkter: $\boxed{r(-1/\sqrt{5}) = 1 - \sqrt{5}}$, $\boxed{r(1/\sqrt{5}) = 1 + \sqrt{5}}$.

Nu till ellipsbågen. Vi betraktar bågen som likhetsbivillkoret $g(x, y) = 0$ med $g(x, y) = 4x^2 + 5y^2 - 1$. Vi har redan undersökt randen (samma som ändpunkterna i föregående fall) och ser på inre punkter. Vi använder Lagrangemultiplikatorer och kräver att determinanten, av matrisen med gradienterna som rader, skall vara noll.

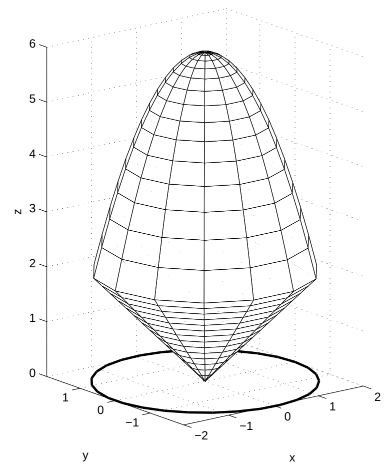
$$\det \begin{bmatrix} \nabla f(x,y) \\ \nabla g(x,y) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 8x+4 & 10y+5 \\ 8x & 10y \end{bmatrix} = (8x+4)\ 10y - 8x\ (10y+5) = 40(y-x)$$

så att $y = x$. Detta i bivillkoret ger

$$9x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1/3$$

$x = -1/3$ tillhör inte området, $\boxed{f(1/3, 1/3) = 4}$. Minsta värde är $1 - \sqrt{5}$ och största är 4.

6. $z = 6 - (x^2 + y^2)$ är en paraboloid (en "kulle") och $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ är en kon, så kroppen ser lite ut som en glasstrut med (mycket) glass i. Här en bild:



Projektionen av skärningskurvan, i x-y-planet, ges av:

$$6 - (x^2 + y^2) = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r^2 + r - 6 = 0$$

med polära koordinater, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Denna ekvation har positiv rot $r = 2$, så integrationsområdet ges av $D = \{\ (x, y)\ :\ x^2 + y^2 \le 4\ \}$. Volymen, V, kan alltså skrivas (med polära koordinater, det sista r-et är funktionaldeterminanten):

$$\iint_D 6 - (x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + y^2}\ dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (6 - r^2 - r) r\ d\varphi \right) dr =$$

$$2\pi \int_0^2 (6 - r^2 - r) r\ dr = 2\pi \left[3r^2 - r^3/3 - r^4/4 \right]_0^2 = 32\pi/3$$

7. Vi använder Greens formel t.ex, med $D = \{(x, y) \ : \ 1 \leq x, y \leq 2 \ \}$, och får

$$\int_\gamma xye^x \ dx + xy \sin y \ dy = \iint_D y \sin y - xe^x \ dxdy = \int_1^2 \left(\int_1^2 y \sin y \ dx \right) dy - \int_1^2 \left(\int_1^2 xe^x \ dy \right) dx =$$

$$\int_1^2 y \sin y \ dx - \int_1^2 xe^x \ dy = [-y \cos y]_1^2 - \int_1^2 - \cos y \ dy - \left([xe^x]_1^2 - \int_1^2 e^x \ dx \right) =$$

$$-2 \cos 2 + \cos 1 - 2e^2 + e + [\sin y]_1^2 + [e^x]_1^2 = -2 \cos 2 + \cos 1 - 2e^2 + e + \sin 2 - \sin 1 + e^2 - e =$$

$$\cos 1 - 2 \cos 2 + \sin 2 - \sin 1 - e^2$$

där partiell integration används för $y \sin y$ samt xe^x.

8. Gränsvärdet existerar i a) ty nämnaren är definierad och funktionen är kontinuerlig för $(x, y) = (0, 0)$. Gränsvärdet är alltså lika med funktionsvärdet som är π.
Gränsvärdet existerar inte i b), ty vi får olika värden utmed två vägar mot origo.

$$y = \alpha x \Rightarrow \frac{x^2 y^2}{2x^4 + y^4} = \frac{\alpha^2 x^4}{(2 + \alpha^4) x^4} = \frac{\alpha^2}{2 + \alpha^4}$$

som ger olika värden för t.ex. $\alpha = 1$ och $\alpha = 2$.