Tentamen: Flervariabelmatematik Z2, MVE040, Chalmers, 2007-08-31, V

Skrivtid:	14.00-18.00.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@math.chalmers.se.
Vakt:	Jonas Hartwig, tel. 0762-721860.
	Frågor om tentamen kan ställas omkring 15 och 17.
Resultat:	Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Betygsgränser:	10, 15, 20 poäng av maximalt 25.
Lösningsförslag:	Måndag på www.
Hjälpmedel:	Inga, förutom bifogat formelblad.

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.
- Vektorer och matriser skrivs med **fetstil** och ej med tilde (˜).

Kontrollera att Du skriver rätt flervariabel-tenta! Det kan gå flera samma dag.

1. Vi vill lösa följande system med hjälp av Newtons metod, där f är en reellvärd funktion av de reella variablerna x_1 och x_2.
$$\begin{cases} (f(x_1,x_2))^2+\sin(x_1x_2)=1 \\ 3\cos(f(x_1,x_2))+x_1^2+x_2=3 \end{cases}$$
a) Formulera Newtons metod för problemet (för en allmän funktion f).
b) Använd resultatet i a) för att skriva ett enkelt Matlabprogram för att lösa problemet. En enkel Newton-loop som kör tio iterationer är tillräckligt. Du kan utnyttja Matlabfunktionerna `f` och `grad`.
`f(x)` returnerar funktionsvärdet, $f(x_1,x_2)$, givet att `x` är en 2×1-matrix som innehåller x_1 och x_2. Analogt returnerar `grad(x)` gradienten av f (som en 2×1-matris). Endast den sista approximationen av lösningen behöver skrivas ut. (4p)

2. a) Skriv om problemet nedan som ett system av första ordningens ekvationer, där alla ingående funktioner är reellvärda.
b) Formulera sedan Eulers metod för problemet och tag ett Euler-steg med steglängden $h=0.1$.

$\mathbf{r}(t)=(r_1(t),r_2(t))$, är en **vektorvärd** funktion av tiden t och $v(t)$ är en reellvärd funktion.
$$\begin{cases} \mathbf{r}'=\mathbf{r}+(\mathbf{r}\cdot\sqrt{v\cdot t})/(|r_1|+|r_2|) \\ v'=r_1r_2+t\cdot v \end{cases}, \quad r_1(2)=6,\ r_2(2)=4,\ v(2)=8 \qquad (3p)$$

3. Låt (a,b,c) vara en punkt på hyperboloiden $x^2+y^2-z^2=1$ och antag att tangentplanet i denna punkt innehåller punkten $(1,2,3)$. Visa att de punkter (a,b,c) för vilka detta inträffar alla ligger på ett visst plan i rymden, och bestäm ekvationen för detta plan. (3p)

Fortsättning på nästa sida!

4. Lös differentialekvationen

$$2f'_x(x,y) + 3f'_y(x,y) = x^2$$

genom att införa de nya variablerna u och v enligt:

$$\begin{cases} x = 2u - 3v \\ y = 3u + 2v \end{cases} \qquad \text{(3p)}$$

5. Vi vill tillverka en konservburk (en rät cirkulär cylinder) med höjd h och diameter d. Vi vill maximera burkens volym när burkens area, A, är given. Ändytorna räknas med i arean och utgörs alltså av cirkelskivor. Bevisa att volymen antar ett största värde. Bestäm detta värde samt de h och d som ger maximum. (Dessa kvantiteter kommer givetvis att bero på A.) Bestäm även kvoten mellan de optimala h och d. (3p)

6. Beräkna

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{x-y+1}, \quad D = \{\ (x,y)\ :\ 0 \le y \le x \le 1\ \} \qquad \text{(3p)}$$

7. Beräkna

$$\int_\gamma (x^2 - xy)dx + (xy - y^2)dy$$

där γ går medurs runt triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,1)$ och $(2,0)$. (3p)

8. $a > 0$ är ett reellt tal. Avgör för vilka a följande gränsvärde existerar och beräkna i så fall gränsvärdet. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{x_1x_2 - x_3x_4}{(x_1^2 + x_3^2)^a}$$

(3p)