Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2007-08-31

1. Vi inför vektorn $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ och skriver $f(\mathbf{x})$ i stället för $f(x_1, x_2)$. Newtons metod kan skrivas:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \begin{bmatrix} f^2(\mathbf{x}^{(k)}) + \sin(x_1^{(k)} x_2^{(k)}) - 1 \\ 3\cos(f(\mathbf{x}^{(k)})) + (x_1^{(k)})^2 + x_2^{(k)} - 3 \end{bmatrix}$$

där

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) = \begin{bmatrix} 2f(\mathbf{x}^{(k)})f_1'(\mathbf{x}^{(k)}) + x_2^{(k)}\cos(x_1^{(k)}x_2^{(k)}) & 2f(\mathbf{x}^{(k)})f_2'(\mathbf{x}^{(k)}) + x_1^{(k)}\cos(x_1^{(k)}x_2^{(k)}) \\ -3\sin(f(\mathbf{x}^{(k)}))f_1'(\mathbf{x}^{(k)}) + 2x_1^{(k)} & -3\sin(f(\mathbf{x}^{(k)}))f_2'(\mathbf{x}^{(k)}) + 1 \end{bmatrix}$$

f_1'och f_2' betecknar de partiella derivatorna. Matlabkoden blir:

```
x = randn(2, 1);   % startvektor
for k = 1:10
  fx   = f(x);
  sf   = sin(fx);
  funk = [fx^2+sin(x(1)*x(2))-1; 3*cos(fx)+x(1)^2+x(2)-3];
  g    = grad(x);
  cs   = cos(x(1)*x(2));
  J    = [2*fx*g(1)+x(2)*cs,   2*fx*g(2)+x(1)*cs
          -3*sf*g(1)+2*x(1),  -3*sf*g(2)+1];
  x    = x - J \ funk;
end
x
```

2. Inför $y_1 = r_1$, $y_2 = r_2$ samt $y_3 = v$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + \sqrt{y_3 t} \cdot y_1/(|y_1| + |y_2|) \\ y_2' = y_2 + \sqrt{y_3 t} \cdot y_2/(|y_1| + |y_2|) \\ y_3' = y_1 y_2 + t y_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(2) = 6 \\ y_2(2) = 4 \\ y_3(2) = 8 \end{cases}$$

Så

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} y_1^{(0)} + \sqrt{y_3^{(0)} t_0} \cdot y_1^{(0)}/(|y_1^{(0)}| + |y_2^{(0)}|) \\ y_2^{(0)} + \sqrt{y_3^{(0)} t_0} \cdot y_2^{(0)}/(|y_1^{(0)}| + |y_2^{(0)}|) \\ y_1^{(0)} y_2^{(0)} + t_0 y_3^{(0)} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 6 + 4 \cdot 6/(6+4) \\ 4 + 4 \cdot 4/(6+4) \\ 6 \cdot 4 + 2 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.84 \\ 4.56 \\ 12 \end{bmatrix}$$

3. Tangentplanet kan skrivas:

$$(x-a)2a + (y-b)2b + (z-c)(-2c) = 0$$

Eftersom $(1, 2, 3)$ ligger i planet gäller

$$(1-a)2a + (2-b)2b + (3-c)(-2c) = 0 \Leftrightarrow a + 2b - 3c - (a^2 + b^2 - c^2) = 0 \Leftrightarrow a + 2b - 3c - 1 = 0$$

då punkten även ligger på ytan. $a + 2b - 3c - 1 = 0$ är den sökta ekvationen.

4. Man kan göra på flera sätt, här ett. Derivera:
$f_u' = f_x' 2 + f_y' 3$ (vars högerled är vänsterled i vår ekvation) och $f_v' = f_x'(-3) + f_y' 2$. Så vi noterar att vårt problem kan skrivas:

$$f_u' = (2u - 3v)^2$$

som har lösningen $f(u,v) = (2u-3v)^3/6 + g(v)$, där g är en deriverbar funktion av en reell variabel. För att uttrycka lösningen i (x,y) använder vi sambandet med (u,v) (lös det linjära ekvationssystemet) och får $u = (2x+3y)/13, v = (2y-3x)/13$ så att $f(x,y) = x^3/6 + g(2y-3x)$ (faktorn $1/13$ kan vi ju baka in i g).

5. Arean ges av $A = \pi dh + \pi d^2/2$ och volymen $V = \pi d^2 h/4$. Både d och h är positiva (ur rimlighetssynpunkt). d är dessutom uppåt begränsad, ty $A = \pi dh + \pi d^2/2 \geq \pi d^2/2$. Alltså gäller att $0 < d \leq \sqrt{2A/\pi} = d_1$.
Lös ut h ur uttrycket för A:
$$h = (A - \pi d^2/2)/(\pi d) = A/(\pi d) - d/2$$
där vi också noterar att h är definierat för varje $0 < d \leq d_1$ med $h = 0$ för $d = d_1$. Detta ger
$$V = \pi d^2(A/(\pi d) - d/2)/4 = Ad/4 - \pi d^3/8$$
V är en kontinuerlig funktion av d, $V(d)$. Vi noterar att $V(d) \to 0,\ d \to 0$, men eftersom det existerar $0 < d < d_1$ där $h > 0$ och därmed $V > 0$ så måste det existera $0 < d_0$ så att V antar ett största värde i det inre av $[d_0, d_1]$. Vi hittar detta på vanligt sätt (och tar bara den positiva roten):
$$V'(d) = 0 \Rightarrow \frac{A}{4} - \frac{3\pi d^2}{8} = 0 \Rightarrow d = \sqrt{2A/(3\pi)}$$
Efter lite räknande ser man att $h/d = 1$ varför $V = \pi d^3/4 = (A/18)\sqrt{6A/\pi} = A\sqrt{A/(54\pi)}$.

6. Vi använder partiell integration (andra raden):
$$\iint_D \frac{dxdy}{x-y+1} = \int_0^1 \left[\int_0^x \frac{dy}{x-y+1}\right] dx = \int_0^1 [-\ln(x-y+1)]_{y=0}^{y=x}\ dx =$$
$$\int_0^1 \ln(x+1)\ dx = [x\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}\ dx = \ln(2) - \int_0^1 1 - \frac{1}{x+1}\ dx =$$
$$\ln(2) - [x - \ln(x+1)]_0^1 = 2\ln(2) - 1 = \ln(4) - 1$$

7. Vi kan (men behöver inte) använda Greens formel. Observera första minustecknet (för orienteringen)!
$$-\int_\gamma (x^2 - xy)dx + (xy - y^2)dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(xy - y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - xy)\ dxdy = \iint_D y + x\ dxdy =$$
$$\int_0^1 \left[\int_y^{2-y} x + y\ dx\right] dy = \int_0^1 \left[x^2/2 + xy\right]_{x=y}^{x=2-y} dy = \int_0^1 2 - 2y^2\ dy = \left[2y - 2y^3/3\right]_0^1 = 4/3$$
Svar: $-4/3$ (glöm ej minustecknet).

8. Gränsvärdet existerar inte när $1/2 < a$ Tag t.ex. $x_1 = 0, x_3 > 0$, då gäller att:
$$\frac{x_1x_2 - x_3x_4}{(x_1^2 + x_3^2)^a} = \frac{-x_3x_4}{x_3^{2/a}} = -x_3^{1-2a}x_4$$
vilket visar att $1 - 2a \geq 0$ dvs. $a \leq 1/2$ är nödvändigt (annars är kvoten obestämd när $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$; vi kan få olika gränsvärden beroende på hur x_3 och x_4 går mot noll). Antag nu att $0 < a \leq 1/2$. Då existerar gränsvärdet och är lika med noll. Vi visar först ett hjälpsteg. Om $0 \leq z, w \leq 1$ så gäller att $z \leq z^{2a} \leq (z^2 + w^2)^a$. Den andra olikheten följer av att $z \to z^{2a}$ är en växande funktion och den första är ekvivalent med $1 \leq z^{2a-1}$ (om $z \neq 0$, men $z \leq z^{2a}$ gäller även om $z = 0$) vilket är uppfyllt eftersom $2a - 1 \leq 0$ och $z \leq 1$. När $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$, när $\mathbf{x}$ ligger tillräckligt nära $\mathbf{0}$, gäller:
$$0 \leq \left|\frac{x_1x_2 - x_3x_4}{(x_1^2 + x_3^2)^a}\right| \leq \frac{|x_1x_2|}{(x_1^2 + x_3^2)^a} + \frac{|x_3x_4|}{(x_1^2 + x_3^2)^a} \leq \frac{(x_1^2 + x_3^2)^a\ |x_2|}{(x_1^2 + x_3^2)^a} + \frac{(x_1^2 + x_3^2)^a\ |x_4|}{(x_1^2 + x_3^2)^a} = |x_2| + |x_4| \to 0$$
Där det sista steget följer av att $|x_2| + |x_4|$ är en kontinuerlig funktion.