Thomas Ericsson
Matematik, Chalmers/GU

Tentamen: Flervariabelmatematik Z2, MVE040, Chalmers, 2007-01-20, V

Skrivtid:	14.00-18.00.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@math.chalmers.se.
Vakt:	Tobias Gebäck, tel. 0762-721860.
	Frågor om tentamen kan ställas omkring 15 och 17.
Resultat:	Anslås Matematiskt Centrum, anslagstavlan vid rum MVF22. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Betygsgränser:	10, 15, 20 poäng av maximalt 25.
Lösningsförslag:	Måndag på www.
Hjälpmedel:	Inga, förutom bifogat formelblad.

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.
- Vektorer och matriser skrivs med **fetstil** och ej med tilde (˜).

Kontrollera att Du skriver rätt flervariabel-tenta! Det kan gå flera samma dag.

---

1. Vi vill lösa följande system med hjälp av Newtons metod, där f är en reellvärd funktion av de reella variablerna x_1 och x_2.
$$\begin{cases} (f(x_1,x_2))^2 + \sin(x_1 x_2) = 1 \\ 3f(x_1,x_2) + x_1^2 + x_2 = 3 \end{cases}$$
a) Formulera Newtons metod för problemet (för en allmän funktion f).
b) Använd resultatet i a) för att skriva ett enkelt Matlabprogram för att lösa problemet. En enkel Newton-loop som kör tio iterationer är tillräckligt. Du kan utnyttja Matlabfunktionerna `f` och `grad`.
`f(x)` returnerar funktionsvärdet, $f(x_1,x_2)$, givet att `x` är en 2×1-matrix som innehåller x_1 och x_2. Analogt returnerar `grad(x)` gradienten av f (som en 2×1-matris). Endast den sista approximationen av lösningen behöver skrivas ut. (4p)

2. a) Skriv om problemet nedan som ett system av första ordningens ekvationer, där alla ingående funktioner är reellvärda.
b) Formulera sedan Eulers metod för problemet och tag ett Euler-steg med steglängden $h = 0.1$.

$\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t))$, är en **vektorvärd** funktion av tiden t och $v(t)$ är en reellvärd funktion.
$$\begin{cases} \mathbf{r}' = v \cdot t \cdot \mathbf{r} \\ v' = r_1 - r_2 + t \cdot v \cdot |\mathbf{r}| \end{cases}, \quad r_1(2) = 3,\ r_2(2) = 4,\ v(2) = 5 \qquad (3p)$$

3. Bestäm alla (x, y) sådana att riktningsderivatan av f i punkten (x, y) och i riktningen $(1, 1)$ har värdet ett. $f(x, y) = \sqrt{2}\, x + xy^2$. (3p)

Fortsättning på nästa sida!

4. Hitta alla lösningar till differentialekvationen

$$f''_{xx}(x,y) + f''_{xy}(x,y) + f''_{yy}(x,y) = 12(x+y)^4$$

där f är av formen $f(x,y) = g\big((x+y)^2\big)$, $x, y > 0$. (3p)

5. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen

$$f(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$$

i området $x \geq 0,\ y \geq 0$. (3p)

6. a och b är positiva reella tal. Beräkna volymen, i termer av a och b, av den begränsade kropp som innesluts av ytorna:

$$z = ax^2 + by^2 - 4a \quad \text{och} \quad z = 4b - bx^2 - ay^2 \qquad \text{(3p)}$$

7. Visa hur Greens formel kan användas för att beräkna arean av ett område D. Tillämpa detta resultat för att beräkna arean mellan x-axeln och kurvan med parameterframställningen:

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 2\ (1 - \cos t) \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(3p)

8. Avgör för a) respektive b) nedan om gränsvärdet existerar och beräkna i så fall gränsvärdet. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. (3p)

a) $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{x_1x_2 - x_3x_4}{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}}$ b) $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{x_1x_2 - x_3x_4}{x_1^2 + x_3^2}$

Formelblad: flervariablematematik för Z2, MVE040, Chalmers

Får användas på tentamen i flervariablematematik
för Z2 när ansvarig är Thomas Ericsson.

Trigonometri:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \quad \cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}, \quad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Vektorprodukt: Med $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ och $\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]$ är

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a}), \quad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}, \quad (\alpha\,\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(\alpha\,\mathbf{b}) = \alpha\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = [a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1]$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{e}_x\times\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y\times\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$

Några Taylorutvecklingar:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}x^{2n-1} + \dots, \quad |x| < \frac{\pi}{2} \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \le 1 \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \dots, \quad |x| < 1 \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \dots, \quad |x| \le 1 \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} + \dots, \quad -1 < x \le 1
\end{aligned}$$

Några integraler, integrationskonstanten är utelämnad. $a > 0$, $c > 0$.

$$\int \sqrt{a^2x^2 \pm c^2}\; dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2x^2 \pm c^2} \pm \frac{c^2}{2a} \ln \left| ax + \sqrt{a^2x^2 \pm c^2} \right|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2x^2 \pm c^2}}\; dx = \frac{1}{a} \ln \left| ax + \sqrt{a^2x^2 \pm c^2} \right|$$

$$\int \sqrt{c^2 - a^2x^2}\; dx = \frac{1}{2} x \sqrt{c^2 - a^2x^2} + \frac{c^2}{2a} \arcsin \frac{ax}{c}$$

Rymdpolära koordinater:

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\psi \\ y = r \sin\theta \sin\psi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \le \psi < 2\pi, \quad \frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\psi)} = r^2 \sin\theta$$

Tangentplanet i (a, b, c) till $f(x, y, z) = C$:

$$f_x'(a,b,c)\,(x-a) + f_y'(a,b,c)\,(y-b) + f_z'(a,b,c)\,(z-c) = 0$$

Taylors formel:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f_x'(a,b)\,h + f_y'(a,b)\,k + \frac{1}{2}\left(f_{xx}''(a,b)\,h^2 + 2f_{xy}''(a,b)\,hk + f_{yy}''(a,b)\,k^2\right) + \left(h^2 + k^2\right)^{\frac{3}{2}}\; B(h,k)$$

Greens formel:

$$\int_{\partial D} P\; dx + Q\; dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\; dx\, dy$$

Ett Newtonsteg:

$$\mathbf{x}^{(j+1)} = \mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(j)}\right)\, \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(j)}\right)$$

Ett Newtonsteg (för optimering):

$$\mathbf{x}^{(j+1)} = \mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(j)}\right)\, \nabla f\left(\mathbf{x}^{(j)}\right)$$

Ett Eulersteg:

$$\mathbf{y}^{(j+1)} = \mathbf{y}^{(j)} + h\, \mathbf{f}\left(t_j, \mathbf{y}^{(j)}\right)$$

Approximationer av några funktionsvärden:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln x$	0	0.6931	1.0986	1.3863	1.6094	1.7918	1.9459	2.0794	2.1972	2.3026
$\log_{10} x$	0	0.3010	0.4771	0.6021	0.6990	0.7782	0.8451	0.9031	0.9542	1
e^x	2.7183	7.3891	20.086	54.598	148.41	403.43	1096.6	2981.0	8103.1	22026
$\sqrt{x}$	1	1.4142	1.7321	2	2.2361	2.4495	2.6458	2.8284	3	3.1623
$1/\sqrt{x}$	1	0.7071	0.5774	0.5000	0.4472	0.4082	0.3780	0.3536	0.3333	0.3162
$\sin(\pi x/20)$	0.1564	0.3090	0.4540	0.5878	0.7071	0.8090	0.8910	0.9511	0.9877	1
$\cos(\pi x/20)$	0.9877	0.9511	0.8910	0.8090	0.7071	0.5878	0.4540	0.3090	0.1564	0
$\tan(\pi x/20)$	0.1584	0.3249	0.5095	0.7265	1	1.3764	1.9626	3.0777	6.3138	∞
$\arcsin(x/10)$	0.1002	0.2014	0.3047	0.4115	0.5236	0.6435	0.7754	0.9273	1.1198	1.5708
$\arccos(x/10)$	1.4706	1.3694	1.2661	1.1593	1.0472	0.9273	0.7954	0.6435	0.4510	0
$\arccos(-x/10)$	1.6710	1.7722	1.8755	1.9823	2.0944	2.2143	2.3462	2.4981	2.6906	3.1416