Thomas Ericsson
Matematik, Chalmers/GU

Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2007-01-20

1. Vi inför vektorn $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ och skriver $f(\mathbf{x})$ i stället för $f(x_1, x_2)$. Newtons metod kan skrivas:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \begin{bmatrix} f^2(\mathbf{x}^{(k)}) + \sin(x_1^{(k)} x_2^{(k)}) - 1 \\ 3f(\mathbf{x}^{(k)}) + (x_1^{(k)})^2 + x_2^{(k)} - 3 \end{bmatrix}$$

där

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) = \begin{bmatrix} 2f(\mathbf{x}^{(k)})f_1'(\mathbf{x}^{(k)}) + x_2^{(k)} \cos(x_1^{(k)} x_2^{(k)}) & 2f(\mathbf{x}^{(k)})f_2'(\mathbf{x}^{(k)}) + x_1^{(k)} \cos(x_1^{(k)} x_2^{(k)}) \\ 3f_1'(\mathbf{x}^{(k)}) + 2x_1^{(k)} & 3f_2'(\mathbf{x}^{(k)}) + 1 \end{bmatrix}$$

f_1'och f_2' betecknar de partiella derivatorna. Matlabkoden blir:

```
x = randn(2, 1);    % startvektor
for k = 1:10
  fx   = f(x);
  funk = [fx^2+sin(x(1)*x(2))-1; 3*fx+x(1)^2+x(2)-3];
  g    = grad(x);
  cs   = cos(x(1)*x(2));
  J    = [2*fx*g(1)+x(2)*cs, 2*fx*g(2)+x(1)*cs
          3*g(1)+2*x(1),     3*g(2)+1];
  x    = x - J \ funk;
end
x
```

2. Inför $y_1 = r_1$, $y_2 = r_2$ samt $y_3 = v$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = y_3 t y_1 \\ y_2' = y_3 t y_2 \\ y_3' = y_1 - y_2 + t y_3 \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(2) = 3 \\ y_2(2) = 4 \\ y_3(2) = 5 \end{cases}$$

Så

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} y_3^{(0)} t_0 y_1^{(0)} \\ y_3^{(0)} t_0 y_2^{(0)} \\ y_1^{(0)} - y_2^{(0)} + t_0 y_3^{(0)} \sqrt{(y_1^{(0)})^2 + (y_2^{(0)})^2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 5 \cdot 2 \cdot 3 \\ 5 \cdot 2 \cdot 4 \\ 3 - 4 + 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3^2 + 4^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 9.9 \end{bmatrix}$$

3. Riktningsderivatan blir:

$$(\sqrt{2} + y^2,\ 2xy) \cdot (1,1)/\sqrt{2} = 1 + y^2/\sqrt{2} + \sqrt{2}xy$$

och villkoret, $f_{\mathbf{v}}'(x, y) = 1$, blir $y^2/\sqrt{2} + \sqrt{2}xy = 0$ eller $y(y + 2x) = 0$. Alltså är $y = 0$ (x godtyckligt) eller $y + 2x = 0$.

4. Derivera:
$f_x' = 2(x+y)g'$, $f_{xx}'' = 2g' + 4(x+y)^2 g''$, $f_{xy}'' = 2g' + 4(x+y)^2 g''$, $f_y' = 2(x+y)g'$, $f_{yy}'' = 2g' + 4(x+y)^2 g''$ så att

$$f_{xx}''(x,y) + f_{xy}''(x,y) + f_{yy}''(x,y) = 2g' + 4(x+y)^2 g'' + 2g' + 4(x+y)^2 g'' + 2g' + 4(x+y)^2 g'' = 6g' + 12(x+y)^2 g''$$

Sätt $t = (x+y)^2$. Vi får DE:

$$12(tg'' + g'/2) = 12t^2 \quad \Leftrightarrow \quad g'' + g'/(2t) = t$$

som kan lösas på flera olika sätt; här följer ett. Inför $u = g'$, ger $u' + u/(2t) = t$. Lös med integrerande faktor, $u = 2t^2/5 + C/\sqrt{t}$, så att $g = 2t^3/15 + 2C\sqrt{t} + C_2$.
Så svar: $f(x, y) = 2(x + y)^6/15 + C_1(x + y) + C_2$ där C_1, C_2 är godtyckliga konstanter.

5. Funktionen är ickenegativ, $0 \leq f(x, y)$ i området. Eftersom $f(0, 0) = 0$ så är därmed minsta värdet noll. För stora $|(x, y)|$ kommer nämnaren att dominera över täljaren och vi kan göra funktionen godtyckligt liten ($\leq \epsilon$) genom att låta $|(x, y)|$ bli tillräckligt stort. Här i detalj med polära koordinater (med $r > 0$):

$$\frac{x + y}{1 + x^2 + y^2} = \frac{r(\cos\varphi + \sin\varphi)}{1 + r^2} \leq \frac{2}{r} \leq \epsilon, \quad \text{om } r \geq 2/\epsilon$$

Eftersom $f(1, 1) = 2/3$ kan vi hitta en kompakt mängd, till exempel:

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2 + y^2 \leq 100\}$$

där f antar sitt största värde i D (men inte på cirkelbågen). Detta värde bestämmer vi genom att lösa $\text{grad} f(x, y) = \mathbf{0}$. Gradienten blir

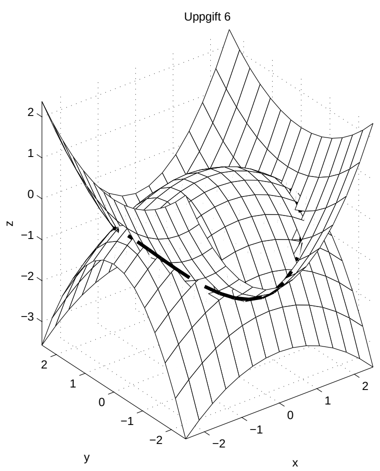
$$\nabla f = \frac{(-x^2 + y^2 - 2xy + 1, x^2 - y^2 - 2xy + 1)}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

så att vi får ekvationerna

$$x^2 - y^2 + 2xy - 1 = 0, \quad x^2 - y^2 - 2xy + 1 = 0$$

Genom att addera ekvationerna får vi $x^2 - y^2 = 0$ eller $y = \pm x$. Subraktion av ekvationerna ger $4xy = 2$. Kombination av de två senaste ekvationerna ger $x^2 = \pm 1/2$. Alltså är $x = 1/\sqrt{2}$ (ty $x \geq 0$) vilket medför att $y = 1/\sqrt{2}$. Vi kontrollerar och övertygar oss att dessa värden satisfierar $\text{grad} f(x, y) = \mathbf{0}$. Slutligen är $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$. Det största värdet kan inte antas på x- eller y-axel, ty $f(x, 0) = x/(1 + x^2)$ antar sitt största värde (derivera) för $x = 1$ och $f(1, 0) = 1/2$. Det största värdet är alltså $1/\sqrt{2}$.

6. Här är först en bild (med $a = 0.5$ och $b = 0.2$):



$z = 4b - bx^2 - ay^2$ liknar en uppochnedvänd kopp (värdet är $4b > 0$ i origo) och $z = ax^2 + by^2 - 4a$ är en rättvänd kopp (värdet är $-4a < 0$ i origo). Volymen, $V(a, b)$, ges av:

$$V(a, b) = \iint_D 4b - bx^2 - ay^2 - (ax^2 + by^2 - 4a)\, dxdy = (a + b) \iint_D 4 - x^2 - y^2\, dxdy$$

där D är området i $x-y$-planet. Vi bestämmer nu ∂D, projektionen, av ytornas skärning, på $x-y$-planet.

$$4b - bx^2 - ay^2 = ax^2 + by^2 - 4a \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

eftersom $a + b > 0$. Så randen utgörs av en cirkel med radie två.
Inför nu polära koordinater, $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. $0 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Funktionaldeterminanten blir

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \det \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} = r$$

Alltså:

$$V(a,b) = (a+b)\int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (4-r^2)\ r\ d\varphi\right) dr = 2\pi(a+b)\int_0^2 4r - r^3\ dr =$$

$$2\pi(a+b)\left[2r^2 - r^4/4\right]_0^2 = 8\pi(a+b)$$

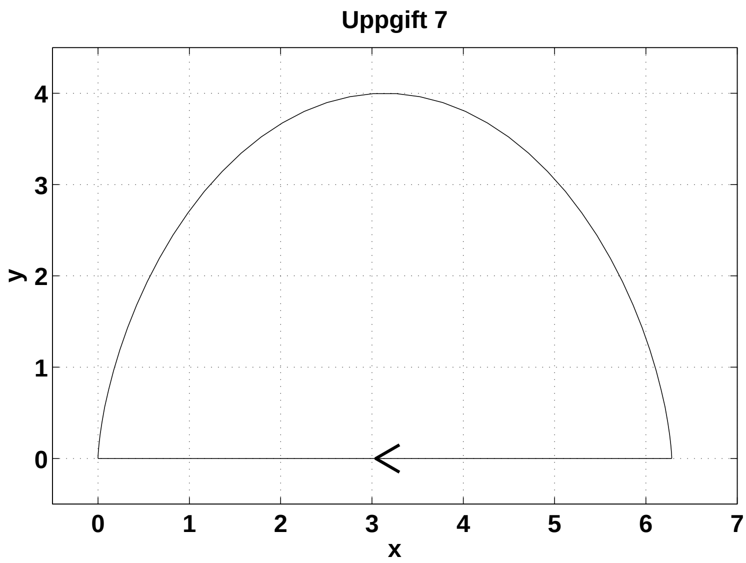
7. Vi har

$$\int_{\partial D} -y\ dx = \iint_D -\frac{\partial}{\partial y}\ (-y)\ dxdy = \iint_D\ dxdy = \mu(D)\quad \text{(arean)}$$

Alternativt kan man ta

$$\int_{\partial D} x\ dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\ x\ dxdy = \iint_D\ dxdy = \mu(D)$$

Här är en bild av randen, observera orienteringen, som är **negativ**.



Låt oss ta den andra varianten, integralen över x-axeln är noll. Observera det första minustecknet! Vi använder partiell integration för $t\sin t$ och formeln för dubbla vinkeln för $\sin^2 t$.

$$-\mu(D) = \int_0^{2\pi} (t - \sin t) 2\sin t\ dt = 2\left(\left[\ t\ (-\cos t)\ \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\cos t\ dt - \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\ dt\right) =$$

$$-4\pi + 2\left[\sin t - t/2 + \sin(2t)/4\right]_0^{2\pi} = -6\pi \Rightarrow \mu(D) = -(-6\pi) = 6\pi$$

Svar: arean är 6π.

8. Gränsvärdet i a) existerar och är lika med noll. Instängning ger:

$$0 \leq \left| \frac{x_1x_2 - x_3x_4}{\sqrt{x_1^2+x_3^2}} \right| \leq \frac{|x_1x_2|}{\sqrt{x_1^2+x_3^2}} + \frac{|x_3x_4|}{\sqrt{x_1^2+x_3^2}} \leq \frac{\sqrt{x_1^2+x_3^2}\,|x_2|}{\sqrt{x_1^2+x_3^2}} + \frac{\sqrt{x_1^2+x_3^2}\,|x_4|}{\sqrt{x_1^2+x_3^2}} = |x_2| + |x_4| \to 0$$

Där det sista steget följer av att $|x_2| + |x_4|$ är en kontinuerlig funktion.

I b) existerar gränsvärdet inte. Tag först $x_1 = x_2 \neq 0$ och $x_3 = x_4 = 0$:

$$\frac{x_1x_2 - x_3x_4}{x_1^2+x_3^2} = 1$$

Tag nu $x_1 = x_2 = 0$ och $x_3 = x_4 \neq 0$:

$$\frac{x_1x_2 - x_3x_4}{x_1^2+x_3^2} = -1$$

Så vi kan få olika gränsvärden beroende på hur vi närmar oss $\mathbf{0}$.