Tentamen: Flervariabelmatematik Z2, MVE040, Chalmers, 2006-10-23, V

Skrivtid:	14.00-18.00.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@math.chalmers.se.
Vakt:	Marcus Warfheimer, tel. 0762-721860.
	Frågor om tentamen kan ställas omkring 15 och 17.
Resultat:	Anslås Matematiskt Centrum, anslagstavlan vid rum MVF22. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Betygsgränser:	10, 15, 20 poäng av maximalt 25.
Lösningsförslag:	På www efter kl. 19.
Hjälpmedel:	Inga, förutom bifogat formelblad.

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.
- Vektorer och matriser skrivs med **fetstil** och ej med tilde (˜).

Kontrollera att Du skriver rätt flervariabel-tenta! Det kan gå flera samma dag.

---

1. Man kan, som bekant, använda Newtons metod på gradienten för att (försöka) beräkna en stationär punkt till en reellvärd funktion. Låt $f(x,y) = x^3 - y\sin(x^2+y^2) - 5$. Ställ upp systemet av ekvationer och formulera sedan Newtons metod för ekvationssystemet. Försök **inte** att lösa systemet för hand. (3p)

2. a) Skriv om problemet nedan som ett system av första ordningens ekvationer, där alla ingående funktioner är reellvärda.
b) Formulera sedan Eulers metod för problemet och tag ett Euler-steg med steglängden $h = 0.1$.

   $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t))$, är en **vektorvärd** funktion av tiden t och $v(t)$ är en reellvärd funktion.

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (v\cdot t\cdot \mathbf{r})/|\mathbf{r}| \\ v' = r_1 - r_2 + t\cdot v \end{cases}, \quad r_1(2) = 3,\ r_2(2) = 4,\ v(2) = 5 \qquad (3\text{p})$$

3. Har ytan, $z = 2x^2 + y^2$, något tangentplan med normalvektor $[4, 4, -1]$? Bestäm i så fall detta tangentplan. (3p)

4. Hitta alla lösningar till differentialekvationen

$$f''_{xx}(x,y) + f''_{xy}(x,y) + f''_{yy}(x,y) = 12(x+y)^2$$

   där f är av formen $f(x,y) = g\big((x+y)^2\big)$, $x, y > 0$. (3p)

Fortsättning på nästa sida!

5. Låt $f(x,y) = x^2 + x^3/2 + y^2 - xy$. Beräkna funktionens stationära punkter och avgör vilka som är lokala extrempunkter och dessa punkters karaktär. (3p)

6. a är ett positivt reellt tal. Gör en enkel skiss av den kropp, som innehåller punkten $(0,0,0)$ och begränsas av ytorna:
$$z = a - 2x^2 - y^2 \quad \text{och} \quad z = 2x^2 + y^2 - a$$
Bestäm a så att kroppens volym är lika med π. (3p)

7. Visa hur Greens formel kan användas för att beräkna arean av ett område D. Tillämpa detta resultat för att beräkna arean mellan x-axeln och cykloidbågen med parameterframställningen:
$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$
(3p)

8. Avgör för a) respektive b) nedan om gränsvärdet existerar och beräkna i så fall gränsvärdet. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ med $n \ge 2$. (4p)
$$\text{a)} \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{(|\mathbf{x}| - x_1)\,(|\mathbf{x}| + x_1)}{(|\mathbf{x}| - x_1/2)^2} \qquad \text{b)} \lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \frac{|\mathbf{x}| - \sqrt{|x_1|}}{|\mathbf{x}| + \sqrt{|x_1|}}$$
Observera att det står ∞ i b-uppgiften.