Tentamen: Flervariabelmatematik Z2, MVE040, Chalmers, 2006-09-01, V

Skrivtid:	14.00-18.00.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@math.chalmers.se.
Vakt:	Karin Kraft och Micke Persson, tel. 0762-721860 och 0762-721861. Frågor om tentamen kan ställas omkring 15 och 17.
Resultat:	Anslås Matematiskt Centrum, anslagstavlan vid rum MVF22. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Betygsgränser:	10, 15, 20 poäng av maximalt 25.
Lösningsförslag:	På www efter kl. 19.
Hjälpmedel:	Inga, förutom bifogat formelblad.

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Vi vill bestämma en **övertriangulär** 2×2-matris $\mathbf{X}$ som satisfierar matrisekvationen:

$$\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   Inför lämpliga beteckningar för de obekanta elementen i matrisen, ställ upp ett system av ekvationer för de obekanta. Formulera sedan Newtons metod för ekvationssystemet. Lös **inte** systemet för hand. **Ledning**: en övertriangulär matris har alla element under diagonalen lika med noll. (3p)

2. Formulera Eulers metod för problemet nedan och tag ett Euler-steg med steglängden $h = 0.1$. (u, v och w är reellvärda funktioner av tiden t.)

$$\begin{cases} v' = tvu' + u \\ u'' = u - u' + v^2 \\ w' = u + v + 2w \end{cases}, \quad \begin{cases} v(2) = 3 \\ u(2) = 1, u'(2) = 2 \\ w(2) = 4 \end{cases} \qquad (3p)$$

3. Tangentplanet i en punkt P på enhetssfären går genom punkterna $(4, 0, 0)$ och $(0, 4, 0)$. Bestäm alla punkter P med denna egenskap. (3p)

4. Hitta alla lösningar till differentialekvationen

$$f''_{xx}(x, y) + f''_{yy}(x, y) = 4(x^2 + y^2)$$

   där f är av formen $f(x, y) = g(x^2 + y^2), x, y > 0$. (3p)

5. Låt $f(x, y) = x^4 + 4xy + y^4$. Beräkna funktionens stationära punkter och avgör vilka som är lokala extrempunkter och dessa punkters karaktär. (3p)

Fortsättning på nästa sida!

---

6. Beräkna volymen av kroppen som ligger inuti cylindern $x^2 + y^2 = 4x$ samt mellan xy-planet och ytan $z = 4 - x^2/4$. (3p)

7. Beräkna
$$\int_\gamma x + y \; dx + x^2 + y^2 \; dy$$
där γ är den kurva som i tur och ordning med räta linjer förbinder punkterna $(0,0)$, $(2,0)$ och $(0,3)$. (3p)

8. Avgör för a) respektive b) nedan om gränsvärdet existerar och beräkna i så fall gränsvärdet. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ med $n \geq 2$. (4p)

a) $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{|\mathbf{x}| - x_1^2}{|\mathbf{x}| + x_1^2}$ b) $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{|\mathbf{x}| - x_1}{|\mathbf{x}| + x_1}$