Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelanalys för Z2

2005-01-13

1. $\mathbf{X}$ är ju symmetrisk och definieras av tre element. Låt $\alpha = x_{1,1}$, $\beta = x_{1,2} = x_{2,1}$ och $\gamma = x_{2,2}$. Vi har då:

$$\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha^2+\beta^2+2\alpha & \alpha\beta+\beta\gamma+2\beta \\ \alpha\beta+\beta\gamma+2\beta & \beta^2+\gamma^2+2\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+\beta^2+2\alpha = 1 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+2\beta = 1 \\ \beta^2+\gamma^2+2\gamma = 1 \end{cases}$$

Så Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k+1} \\ \beta_{k+1} \\ \gamma_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\alpha_k+2 & 2\beta_k & 0 \\ \beta_k & \alpha_k+\gamma_k+2 & \beta_k \\ 0 & 2\beta_k & 2\gamma_k+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_k^2+\beta_k^2+2\alpha_k-1 \\ \alpha_k\beta_k+\beta_k\gamma_k+2\beta_k-1 \\ \beta_k^2+\gamma_k^2+2\gamma_k-1 \end{bmatrix}$$

2. Inför $y_1 = v$, $y_2 = u$, $y_3 = y_2' = u'$ samt $y_4 = y_3' = u''$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = ty_1y_4 + y_3 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = y_2 - y_3 + y_1^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(2) = 3 \\ y_2(2) = 1 \\ y_3(2) = 2 \\ y_4(2) = 4 \end{cases}$$

Så

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \\ y_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ y_4^{(0)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} t_0y_1^{(0)}y_4^{(0)} + y_3^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ y_4^{(0)} \\ y_2^{(0)} - y_3^{(0)} + (y_1^{(0)})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 2\cdot 3\cdot 4+2 \\ 2 \\ 4 \\ 1-2+3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.6 \\ 1.2 \\ 2.4 \\ 4.8 \end{bmatrix}$$

3. Låt $\mathbf{r} = (x, y, z)$, då kan temperaturen skrivas $T(\mathbf{r}) = c/|\mathbf{r}|$ där c ges av sambandet $T(1, 2, 2) = 120°$. Eftersom $|(1, 2, 2)| = 3$ så är $c = 360°$. a) Riktningsderivatan

$$\text{grad}\frac{c}{|\mathbf{r}|} = -c\,\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \Rightarrow T_{\mathbf{v}}'(\mathbf{r}) = -c\,\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{r}|^3}$$

I a) har $\mathbf{v}$ riktningen $(2, 1, 3) - (1, 2, 2) = (1, -1, 1)$ (som har längd $\sqrt{3}$) så att i det aktuella fallet får vi

$$T_{\mathbf{v}}'(1, 2, 2) = -360°\frac{(1, 2, 2)\cdot(1, -1, 1)}{3^3\cdot\sqrt{3}} = -\frac{40°}{3\sqrt{3}}$$

b) Låt φ vara vinkeln mellan $\mathbf{v}$ och ortsvektorn från origo till punkten $\mathbf{r}$. Då gäller:

$$T_{\mathbf{v}}'(\mathbf{r}) = -c\,\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{r}|^3} = -c\frac{|\mathbf{r}|\,|\mathbf{v}|}{|\mathbf{r}|^3}\cos\varphi = \frac{-c\,\cos\varphi}{|\mathbf{r}|^2}$$

som maximeras när $\varphi = -\pi$ dvs när $\mathbf{v}$ är riktad från $\mathbf{r}$ mot origo.

4. Derivera, $f_x' = 2xg'$, $f_y' = 2yg'$ så att

$$xf_x'(x, y) + yf_y'(x, y) = 2x^2g' + 2y^2g'$$

Sätt $t = x^2 + y^2$. Vi får DE:

$$2tg'(t) = 2 \Rightarrow g(t) = c + \ln t$$

Så svar: $f(x, y) = c + \ln(x^2 + y^2)$ där c är en godtycklig konstant.

5. Gradienten blir

$$\nabla f = (4x^3 - 4y, -4x + 4y^3) \quad \text{och} \quad \nabla f = \mathbf{0} \Rightarrow (x, y) = (0, 0) \vee (x, y) = (-1, -1) \vee (x, y) = (1, 1)$$

där rötterna till systemet fås genom att lösa ut y från den första ekvationen och sedan sätta in detta uttryck i den andra, vilket ger $-x + x^9 = 0$ som har lösningar $x = 0 \vee x = \pm 1$. Detta i den första ekvationen ger y-värdena. Nu till deras karaktär.

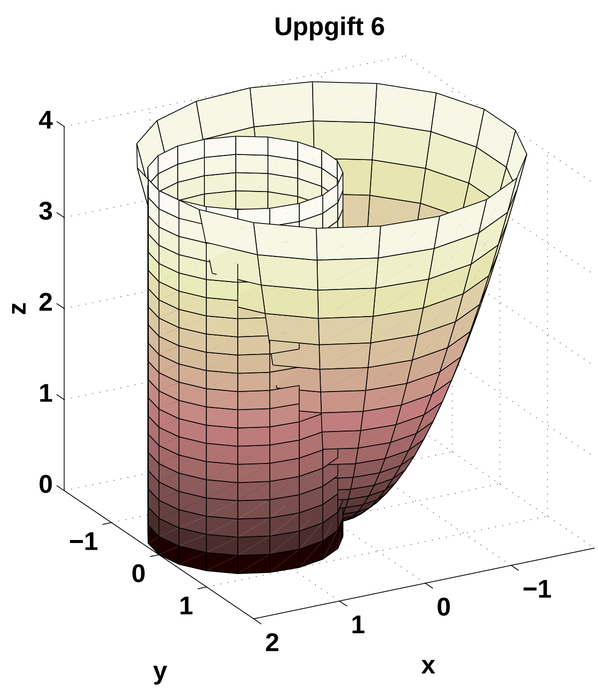
$$Q(h, k) = 12x^2h^2 - 8hk + 12y^2k^2$$

För $(x, y) = (0, 0)$ blir $Q(h, k) = -8hk$ som är indefinit $Q(1, 1) < 0$, $Q(1, -1) > 0$. För $(x, y) = \pm(1, 1)$ blir (man får lite enklare räkningar om man bryter ut faktorn fyra som inte påverkar tecknet).

$$\frac{Q(h, k)}{4} = \left(\sqrt{3}h - \frac{k}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{8k^2}{3}$$

som är positivt definit ($Q(h, k) = 0$ kan endast inträffa om $h = k = 0$). $\pm(1, 1)$ är alltså strängt lokala minimipunkter och $(0, 0)$ är en sadelpunkt.

6. Här är först en bild:



Kvadratkomplettering av $x^2 + y^2 = 2x$ ger $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, så att området i xy-planet, $D = \{\ (x, y) \mid (x - 1)^2 + y^2 \le 1\ \}$. Inför nu polära koordinater, $x = 1 + r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Funktionaldeterminanten blir

$$\frac{d(x, y)}{d(r, \varphi)} = \det \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} = r$$

Volymen kan då skrivas:

$$V = \int\!\!\int_D x^2 + y^2 \; dxdy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 r((1 + r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2) \; dr \right] \; d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 r+2r^2\cos\varphi+r^3\,dr\right]\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}+\frac{2r^3}{3}\cos\varphi+\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1}\,d\varphi=$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cos\varphi+\frac{1}{4}\,d\varphi=\left[\frac{3\varphi}{4}+\frac{2}{3}\sin\varphi\right]_0^{2\pi}=\frac{3\pi}{2}$$

7. Man kan använda Greens formel och får då komplettera med linjen mellan $(3,0)$ och $(0,0)$. Jag har valt att integrera direkt. $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$ där $\gamma_1:(t,0),0\le t\le 2$, $\gamma_2:(2-t,3t/2),0\le t\le 2$,

$$\int_{\gamma_1} xy^2+xy\,dx+x^3\,dy=\int_0^2\big(t\cdot 0^2+t\cdot 0\big)\cdot 1=0$$

$$\int_{\gamma_2} xy^2+xy\,dx+x^3\,dy=\int_0^2\big((2-t)(3t/2)^2+(2-t)(3t/2)\big)\cdot(-1)+(2-t)^3\cdot 3/2\,dt=\cdots=1$$

Med Greens formel blir dubbelintegralen (över triangeln) av $3x^2-2xy-x$, lika med 1. Kurvintegralen från $(3,0)$ och $(0,0)$ blir 0, så att resultatet återigen blir ett.

8. I a) existerar gränsvärdet och vi har

$$\frac{\sin(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|+x_1^2}=\frac{\sin(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}\,\frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|+x_1^2}$$

där den första kvoten går mot ett (standardgränsvärdet $\sin t/t\to 1, t\to 0$). För den andra delen använder vi instängning och $x_1^2\le|\mathbf{x}|^2$

$$\frac{1}{1+|\mathbf{x}|}=\frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|+|\mathbf{x}|^2}\le\frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|+x_1^2}\le\frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|}=1$$

där uttrycket längst till vänster går mot ett. Produktregeln för gränsvärden ger därför att gränsvärdet i a)-uppgiften är ett.
Gränsvärdet i b) existerar inte. Tag $\mathbf{x}=(x_1,0,\ldots,0)$ och låt $x_1\to 0$ och tag de ensidiga gränserna när $x_1\to 0$ från vänster respektive höger. $\lim_{x_1\to 0-}\sin(0)/(-x_1)=0$, men $\lim_{x_1\to 0+}\sin(2x_1)/x_1=2$ som är olika.