Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelanalys för Z2

2005-10-17

1. Ekvationerna kan förenklas:

$$\begin{cases} x+y+z-12=0 \\ xyz-8=0 \\ 1/x+1/y+1/z-3=0 \end{cases}$$

så att Newtons metod lyder:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_k z_k & x_k z_k & x_k y_k \\ -1/x_k^2 & -1/y_k^2 & -1/z_k^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_k+y_k+z_k-12 \\ x_k y_k z_k - 8 \\ 1/x_k+1/y_k+1/z_k-3 \end{bmatrix}$$

2. Sätt $y_1 = s_1$, $y_2 = y_1' = s_1'$, $y_3 = s_2$ och $y_4 = y_3' = s_2'$. Vi får då systemet

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_3 - 3y_2^2 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = y_1 - 4y_3 - y_4 + \sin 3t \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = -1 \\ y_3(0) = 2 \\ y_4(0) = -3 \end{cases}$$

och Eulers metod blir

$$\begin{bmatrix} y_1^{(k+1)} \\ y_2^{(k+1)} \\ y_3^{(k+1)} \\ y_4^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ y_3^{(k)} \\ y_4^{(k)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} y_2^{(k)} \\ y_1^{(k)} + 2y_3^{(k)} - 3(y_2^{(k)})^2 \\ y_4^{(k)} \\ y_1^{(k)} - 4y_3^{(k)} - y_4^{(k)} + \sin 3t_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

så att

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \\ y_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 + 2\cdot 2 - 3(-1)^2 \\ -3 \\ 0 - 4\cdot 2 - (-3) + \sin 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.9 \\ 1.7 \\ -3.5 \end{bmatrix}$$

3. Punkten är $(0,0,e^0) = (0,0,1)$, så tangentplanet blir, (med $f(x,y) = e^{x+2y}$)

$$z - 1 = f_x'(0,0)(x-0) + f_y'(0,0)(y-0) = e^0(x-0) + 2e^0(y-0) = x + 2y$$

Svar: $x + 2y - z + 1 = 0$.

4. Det gäller att $|x| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, analogt för $|y|$ och $|z|$. Så

$$\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| \le \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to 0, (x,y,z) \to (0,0,0)$$

ty $x, y, z \to 0$ när $(x,y,z) \to (0,0,0)$ och vi kan utnyttja gränsvärden för sammansatta funktioner ($\sqrt{\ }$ och $x^2+y^2+z^2$). Pga instängning måste alltså $\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \to 0$ och med hjälp av gränsvärden för sammansatta funktioner igen och utnyttjande av att arctan är kontinuerlig så gäller att gränsvärdet blir 0.

5. Gradienten blir

$$\nabla f = (3x^2 + y, x + 3y^2) \quad \text{och} \quad \nabla f = \mathbf{0} \Rightarrow (x,y) = (0,0) \vee (x,y) = (-1/3, -1/3)$$

där rötterna till systemet fås genom att lösa ut y från den första ekvationen och sedan sätta in detta uttryck i den andra, vilket ger $x + 27x^4 = 0$ som har lösningar $x = 0 \vee x = -1/3$. Så de stationära punkterna är $(0, 0)$ och $(-1/3, -1/3)$. Nu till deras karaktär.

$$Q(h, k) = 6xh^2 + 2hk + 6yk^2$$

För $(x, y) = (0, 0)$ blir $Q(h, k) = 2hk$ som är indefinit $Q(1, 1) > 0$, $Q(1, -1) < 0$. För $(x, y) = (-1/3, -1/3)$ blir

$$Q(h, k) = -2(h^2 - hk + k^2) = -2((h - k/2)^2 + 3k^2/4)$$

som är negativt definit ($Q(h, k) = 0$ kan endast inträffa om $h = k = 0$). $(-1/3, -1/3)$ är alltså en strängt lokal maximipunkt och $(0, 0)$ är en sadelpunkt.

6. Med $D = \{ \ (x, y) \mid x^2 + 2y^2 \leq 1 \ \}$ kan volymen skrivas:

$$V = \int\int_D 1 - (x^2 + 2y^2) \ dxdy$$

Variabelbyte: $x = r\cos\varphi, y = (r/\sqrt{2})\sin\varphi$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Funktionaldeterminanten blir

$$\frac{d(x, y)}{d(r, \varphi)} = \det \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ (1/\sqrt{2})\sin\varphi & (r/\sqrt{2})\cos\varphi \end{bmatrix} = r/\sqrt{2}$$

så att

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1 - r^2)\frac{r}{\sqrt{2}} \ d\varphi \right) \ dr = 2\pi \int_0^1 (1 - r^2)\frac{r}{\sqrt{2}} \ dr = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$$

7. $y = x^2/2$ så vi kan låta parametern, $t = x$. Så γ ges av $(t, t^2/2), 0 \leq t \leq 2$.

$$\int_\gamma x^2 + xy \ dx + y^2 - x^2 \ dy = \int_0^2 \left(t^2 + t \cdot t^2/2\right) \cdot 1 + \left((t^2/2)^2 - t^2\right) \cdot t \ dt =$$

$$\int_0^2 t^2 - t^3/2 + t^5/4 = \left[t^3/3 - t^4/8 + t^6/24\right]_0^1 = \frac{10}{3}$$

8. Vi deriverar f,

$$f'_x = g' \ y^2, \ f''_{xx} = g'' \ y^4, \ f''_{xy} = g'' \ 2xy^3 + 2yg'$$

så

$$2xf''_{xx} - yf''_{xy} = 2xy^4g'' - 2xy^4g'' - 2y^2g' = -2y^2g'$$

Så att

$$-2y^2g' = xy^4 \Rightarrow g' + \frac{xy^2}{2} = 0$$

Sätt $t = xy^2$, vi får då problemet $g'(t) + t/2 = 0$ så $g(t) = c - t^2/4 = c - (xy^2)^2/4 = c - x^2y^4/4$, där c är en godtycklig konstant. Så $f(x, y) = c - x^2y^4/4$. Kravet $f(1, 1) = 0$ leder till $0 = f(1, 1) = c - 1/4$ så att $c = 1/4$ och $f(x, y) = (1 - x^2y^4)/4$.