Tentamen i Matematisk analys i en variabel för I1, MVE 015

2007 12 18 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.
Telefon: Ida Säfström, 0762 72 18 60
Lärares närvaro i sal: 9.30 och 11.30
Obs! Ange utbilningsprogram och antagningsår samt namn och personnummer.

---

1. Lös differentialekvationorna
   (a) $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$ (b) $y" - 2y' + 5y = x$ (4p+4p)

2. (a) Beräkna $\int x^3 \sin x^2 dx$ (b) Beräkna $\int_2^\infty \frac{1}{x^2 - 1} dx$ om den konvergerar. (4p+4p)
   Motivera annars att den är divergent.

3. Avgör om serien är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent. Motivera dina slutsatser.
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n(2n+3)}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln(1 + \frac{1}{n})$ (3p+3p)

4. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x^2 - \sin x^2}{x^4(\ln(1+x) - x)}$ (6p)

5. Kurvan $y = x\sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 1,$ är given.
   (a) Beräkna längden av kurvan. (4p)
   (b) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då kurvan roterar runt x-axeln. (2p)

6. Beräkna summan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k(k+1)}$ (6p)

   Ledning: Beräkna först summan av potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k(k+1)}$

7. Redogör för hur man kan uppskatta en summa $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ med en integral. Rita figur, (5p)
   ange lämpliga förutsättningar och motivera uppkomna olikheter.

8. Formulera analysens huvudsats (första delen) och härled insättningsformeln, (5p)
   $\int_a^b f(x)dx = [F(b) - F(a)]_a^b$ om $F'(x) = f(x)$ (dvs andra delen).

Formelsamling finns på baksidan.
Lycka till!
SJ

Trigonometriska formler

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin x \ \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$

$\cos x \ \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$

$\sin x \ \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$

Maclaurinserier

$$
\begin{array}{rclcll}
e^x & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} & = & 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dots & \text{för alla } x \\
\sin x & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} & = & x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots & \text{för alla } x \\
\cos x & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} & = & 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dots & \text{för alla } x \\
\ln(1+x) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} & = & x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dots & \text{för } -1 < x \le 1 \\
\dfrac{1}{(1-x)} & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k & = & x + x^2 + x^3 + \dots & \text{för } -1 < x < 1 \\
\arctan x & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} & = & x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dots & \text{för } -1 \le x <\le 1 \\
(1+x)^p & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k & = & 1 + px + \dfrac{p(p-1)}{2!} x^2 + \dots & \text{för } -1 < x < 1
\end{array}
$$