MVE015 07 12 18

1 a) Separabel ekvation, $\frac{y'}{1+y^2} = 1$

$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$

$\arctan y = x + C \iff y = \tan(x+c)$, $-\frac{\pi}{2} < x+c < \frac{\pi}{2}$

$y(0) = 0$ ger $C = 0$, $\underline{y = \tan x}$

---

b) Karaktäristisk ekvation: $r^2 - 2r + 5 = 0$

$r = 1 \pm 2i$, $y_h = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^x$

Partikulärlösning: Ansätt polynom av grad 1:

$y = ax+b$ Insatt i ekv. $-2a + 5ax + 5b = x$

$y' = a$

$y'' = 0$ $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{2}{25}$

$\underline{y = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x) + \frac{1}{25}(5x+2)}$

---

2 a) $\int x^3 \sin x^2\, dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int t \sin t\, dt = \begin{Bmatrix} \text{Partiell} \\ \text{integr.} \end{Bmatrix} =$

$= \frac{1}{2}\left(-t\cos t + \int \cos t\, dt\right) = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t) =$

$= \underline{\frac{1}{2}(\sin x^2 - x^2\cos x^2)}$

---

b) Partialbråksuppdela

$\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}\int_2^\infty \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{1}{2}\Big[\ln|x-1| - \ln|x+1|\Big]_2^\infty =$

$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^\infty = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty} \ln\left|\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right| - \ln\frac{1}{3}\right) =$

$= \frac{1}{2}(\ln 1 + \ln 3) = \underline{\frac{1}{2}\ln 3}$

---

3 a) $\frac{\sqrt{n}}{n(2n+3)} \Big/ \frac{1}{n^{3/2}} = \frac{n^2}{2n^2+3n} = \frac{1}{2+3/n} \to \frac{1}{2}$ då $n \to \infty$

Eftersom $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}}$ är konvergent ($\frac{3}{2} > 1$)

Så är $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n}}{n(2n+3)}$ <u>(absolut)konvergent</u>

3 b) $1+\frac{1}{n}$ avtar mot 1 $\Rightarrow \ln(1+\frac{1}{n})$ avtar mot 0 eftersom $\ln x$ är en växande funktion. Då serien dessutom är alternerande är den konvergent. Däremot är $\sum_{n=1}^\infty \ln(1+\frac{1}{n})$ divergent eftersom $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ är det och $\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{1/n} \to 1$ då $n\to\infty$. Serien är alltså <u>betingat konvergent</u>

---

4 Maclaurinutveckla täljare och nämnare:

$\frac{\arctan x^2 - \sin x^2}{x^4(\ln(1+x) - x)} = \frac{x^2 - \frac{(x^2)^3}{3} + O(x^{10}) - (x^2 - \frac{(x^2)^3}{6} + O(x^{10}))}{x^4(x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) - x)} =$

$= \frac{-\frac{x^6}{6} + O(x^{10})}{-\frac{x^6}{2} + O(x^7)} = \frac{-\frac{1}{6} + O(x^4)}{-\frac{1}{2} + O(x)} \to \underline{\frac{1}{3}}$ då $x \to 0$

---

5 a) $L = \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+(\frac{3}{2}\sqrt{x})^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx =$

$= \frac{8}{27}\left[(1+\frac{9}{4}x)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1\right) = \underline{\frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8)}$

---

b) $V = \int_0^1 \pi y^2\, dx = \pi\int_0^1 x^3\, dx = \underline{\frac{\pi}{4}}$

---

6 $f(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k(k+1)}$, $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)} \to 1$. $R = 1$

$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k k(k+1)} = -2\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k(-\frac{1}{2})^{k+1}}{k(k+1)} = -2f(-\frac{1}{2})$

för $|x| < 1$ kan vi derivera termvis:

$f'(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k x^k}{k} = -\ln(1+x)$

Och $f(x) = -\int \ln(1+x)\, dx = \begin{Bmatrix} \text{Part.} \\ \text{int.} \end{Bmatrix} = -((x+1)\ln(x+1) - x + c)$

Eftersom $f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \dots$ så är $f(0) = 0$ och $C = 0$

Altså är $-2f(-\frac{1}{2}) = 2\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \underline{1 - \ln 2}$

7 Sid 486 i boken 8 Sid 297