MATEMATIK
Chalmers

Hjälpmedel: inga
Tele: Marcus Warfheimer
0762-721860
Lärares närvaro i sal: 9.30 och 11.30

Tentamen i MVE015 Analys i en variabel, I, 5p, 07 08 23, kl 8.30–12.30.

1. Beräkna

$$\text{(a)} \quad \int \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx \qquad \text{(b)} \quad \int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{x})}{x(x-1)^2}\,dx \quad \text{om den konvergerar.}$$

Motivera i (b) annars att den divergerar. 3p+3p

2. Lös differentialekvationerna

$$\text{(a)} \quad y' = x(y^2-y),\ y(0)=2 \qquad \text{(b)} \quad y'' - 2y' - 3y = 8e^x,\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$$

4p+4p

3. Bestäm konstanten a så att gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{x^2} + a\tan x}{x^2\ln(1+x)}$$

existerar. Bestäm sedan gränsvärdet. 6p

4. För vilka värden på x konvergerar potensserien

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(n+1)2^n}?$$

Motivera noga! 6p

5. När kurvan $y = (4-x^2)^{-1/2}$, $0 \le x \le 1$ roterar runt x-axeln uppstår en kropp. Beräkna volymen av den. 6p

6. En partikels bana i planet bestäms av $(x(t),\, y(t))$, där t betecknar tiden. Man vet att funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ uppfyller sambandet

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) - y(t) \\ y'(t) &= x(t) + 3y(t). \end{cases}$$

När $t = 0$ befinner sig partikeln i punkten $(1,\, 0)$. Bestäm $x(t)$ och $y(t)$. 6p

7. I uppgiften förutsätts en deriverbar parametriserad kurva $(x(t), y(t))$ vara given.

   (a) Vad menas med farten till den parametriserade kurvan när $t = t_0$.

   (b) Hur ser (generellt) en ekvation för tangentlinjen till den parametriserade kurvan ut i punkten $(x(t_0), y(t_0)) = (a, b)$. Kurvan förutsätts ha fart $\neq 0$ när $t = t_0$.

   (c) Beräkna båglängden av kurvan $(t, \ln(t+\sqrt{t^2-1}))$, när $2 \le t \le 3$.

   1p+2p+3p

8. Formulera och bevisa ett kritierium för konvergens av alternerande serier. 6p

Förslag till lösningar kommer att finnas på kursens webbsida

http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve015/0607/

Betygsgränser: 20p för trea, 30p för fyra och 40p för femma.

JAS

FORMELBLAD PÅ BAKSIDAN!

Formelblad

Trigonometriska formler

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ $\quad$ $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ $\quad$ $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$

$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$ $\quad$ $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$ $\quad$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$ $\quad$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

Maclaurinserier

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots && \text{för alla } x \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots && \text{för alla } x \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots && \text{för alla } x \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{k} + \cdots && \text{när } |x| < 1 \\
\arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots && \text{när } |x| < 1
\end{aligned}
$$

Laplacetransformen

Räkneregler **Transformer**

$f(t)$	$\tilde{f}(s)$	$f(t)$	$\tilde{f}(s)$
$f'(t)$	$s\tilde{f}(s) - f(0)$	1	$\dfrac{1}{s}$
$f^{(n)}(t)$	$s^n \tilde{f}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$	t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \tilde{f}^{(n)}(s)$	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$(f * g)(t)$	$\tilde{f}(s)\tilde{g}(s)$	$\cos bt$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$
$f(t+p) = f(t)$ för alla t	$\dfrac{1}{1-e^{-ps}} \displaystyle\int_0^p f(t) e^{-st}\, dt$	$\sin bt$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$
$u(t-a) f(t-a)$ där $a > 0$	$e^{-as} \tilde{f}(s)$		
$e^{at} f(t)$	$\tilde{f}(s-a)$		