Lösning till MVE015 Analys i en variabel I, 5p, 07 08 23.

Förkortningar

KE står för karakteristisk ekvation,

KK står för kvadratkomplettering,

PBU står för partialbråksuppdelning,

PI står för partiell integration.

1. (a)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx &= \{\sin^2 x = 1-\cos^2 x\} = \int \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}\,dx = \\ &= \{t=\cos x,\ dt = -\sin x\,dx\} = \int \frac{dt}{t^2-4} = \\ &= \{\text{ PBU }\} = \frac{1}{4}\int \Big(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\Big)\,dt = \frac{1}{4}\ln\Big|\frac{t-2}{t+2}\Big| + C\end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{4}\ln\Big|\frac{\cos x - 2}{\cos x + 2}\Big| + C$ där C är en godtycklig konstant.

(b) När x ligger nära 1 är $\sin(\sqrt{x})/x$ positivt. Låt oss säga att $\sin(\sqrt{x})/x \geq \delta > 0$ när $0 \leq \epsilon \leq x \leq 1$. Vi har då

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^1 \frac{\sin(\sqrt{x})}{x(x-1)^2}\,dx &\geq \delta\int_\epsilon^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \\ &= \delta\Big[-(x-1)^{-1}\Big]_\epsilon^1.\end{aligned}$$

Eftersom

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-\delta}{x-1} = \infty$$

är den mindre integralen divergent. Därmed är också den ursprungliga integralen divergent.

Svar: Integralen är divergent.

2. (a) Separering av variabler ger $dy/(y^2-y) = x\,dx$. Integration av första ledet ger

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y(y-1)} &= \{\text{ PBU }\} = \int \Big(-\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}\Big)\,dy = \\ &= \ln\Big|\frac{y-1}{y}\Big|.\end{aligned}$$

Integration av $dy/(y^2-y) = x\,dx$ ger därför $\ln|(y-1)/y| = x^2/2 + A$, där A är en godtycklig konstant. Exponentiering och eliminering av absolutbelopp ger

$$\frac{y-1}{y} = Be^{x^2/2}$$

där B är en godtycklig konstant $\neq 0$. Eftersom $y(0)=2$ ger detta $1/2 = B$. Löser man nu ut y ur detta har man

$$y = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{x^2/2}} = \frac{2}{2-e^{x^2/2}}.$$

Svar: $y = 1/((1/2)e^{x^2/2}) = 2/(2-e^{x^2/2})$.

(b) Ekvationen har den karaktäristiska ekvationen $r^2 - 2r - 3 = 0$, med rötterna $r = 1 \pm 2$. Lösningsformel ger nu att lösningarna till den homogena ekvationen är $y_h = Ae^{3x} + Be^{-x}$.

För att finna en partikulärlösning ansätts $y_p = Ce^x$, som i ekvationen ger $(C - 2C - 3C)e^x = 8e^x$, så $C = -2$.

Den allmänna lösningen är alltså

$$y = y_h + y_p = Ae^{3x} + Be^{-x} - 2e^x.$$

Villkoret $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$ ger

$$\begin{cases} 1 &= A + B - 2 \\ 0 &= 3A - B - 2 \end{cases}$$

som ger $A = 5/4$ och $B = 7/4$.

Svar: $y(x) = 5e^{3x}/4 + 7e^{-x}/4 - 2e^x$.

3. Vi förlänger kvoten med $\cos x$ och får

$$\frac{xe^{x^2}\cos x + a\sin x}{x^2\ln(1+x)\cos x}.$$

Med kända utvecklingar har vi

$$\begin{aligned} x^2\ln(1+x)\cos x &= x^2(x - x^2/2 + x^3/3 + \dots)(1 - x^2/2! + x^4/4! + \dots) = && (1)\\ &= x^3 + \dots && (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xe^{x^2}\cos x + a\sin x &= x(1 + x^2/1! + \dots)(1 - x^2/2! + \dots) + a(x - x^3/3! + \dots) = && (3)\\ &= (1+a)x + (1 - 1/2 - a/6)x^3 + \dots && (4) \end{aligned}$$

För att få ett gränsvärde måste vi ha $1 + a = 0$, dvs $a = -1$. Kvoten blir då

$$\frac{(4/6)x^3 + \dots}{x^3 + \dots},$$

med gränsvärdet $4/6 = 2/3$, när $x \to 0$.

Svar: $a = -1$ och gränsvärdet blir $2/3$.

4. Om $b_n = x^{2n+1}/((n+1)2^n)$ har man

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{n+1}{n+2}\frac{|x|^2}{2} \to \frac{|x|^2}{2}$$

när $n \to \infty$. Vi ser att potensserien är absolutkonvergent när $|x| < \sqrt{2}$, men inte när $|x| > \sqrt{2}$. Eftersom det är en potensserie divergerar den därför när $|x| > \sqrt{2}$.

När $x = \pm\sqrt{2}$ är serien $\pm\sqrt{2}\sum 1/(n+1)$. Eftersom $1/(n+1) > 1/(n+n) = (1/2)(1/n)$, och serien med termer $1/i$ är känd som divergent kommer även dessa båda serier att divergera, enligt jämförelsekriteriet.

Svar: Den konvergerar när $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

5. Ett vertikalt tvärsnitt genom x på x-axeln och vinkelrätt mot denna är en cirkelskiva med radien $(4-x^2)^{-1/2}$. Ett sådant har area $A(x) = \pi(4-x^2)^{-1}$. Skivformeln ger att volymen är

$$\pi \int_0^1 \frac{dx}{4-x^2} = \pi \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)(2+x)} = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}\right) dx = \frac{\pi}{4} \left[\ln \left|\frac{2+x}{2-x}\right| \right]_0^1.$$

Svar: $\pi \ln(3)/4$.

6. Vi Laplacetransformerar och får med hjälp av räknereglerna att

$$\begin{cases} s\tilde{x} - 1 &= \tilde{x} - \tilde{y} \\ s\tilde{y} &= \tilde{x} + 3\tilde{y}. \end{cases}$$

Vi har använt att $x(0) = 1$ och $y(0) = 0$ eftersom partikeln befinner sig i punkten $(1, 0)$ när $t = 0$.

Den nedersta ekvationen ger oss

$$\tilde{y} = \frac{\tilde{x}}{s-3},$$

som insatt i den översta efter multiplikation med $s-3$ ger

$$s(s-3)\tilde{x} - (s-3) = (s-3)\tilde{x} - \tilde{x}.$$

Vi löser ut $\tilde{x}$ och får

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{s-3}{s^2-4s+4} = \frac{s-3}{(s-2)^2} = \\ &= \frac{(s-2)-1}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2}. \end{aligned}$$

Från tabell och räkneregler ser vi att detta är Laplacetransformen till $e^{2t} - te^{2t}$, så $x(t) = (1-t)e^{2t}$.

Den första av de ursprungliga ekvationerna ger nu

$$y(t) = x(t) - x'(t) = (1-t)e^{2t} - (-1 + 2(1-t))e^{2t} = te^{2t}.$$

Svar: $x(t) = (1-t)e^{2t}$ och $y(t) = te^{2t}$.

7. (c) Vi har $x' = 1$ och

$$y' = \frac{1 + t/\sqrt{t^2-1}}{t + \sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$$

som ger båglängden

$$\int_2^3 \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt = \int_2^3 t/\sqrt{t^2-1}\, dt = \left[\sqrt{t^2-1}\right]_2^3 = \sqrt{8} - \sqrt{3}.$$

Svar: $\sqrt{8} - \sqrt{3}$.

JAS