Lösning till MVE 015 Analys i en variabel I, 5 p, 07 04 14.

Förkortningar

KE står för karakteristisk ekvation,

KK står för kvadratkomplettering,

PBU står för partialbråksuppdelning,

PI står för partiell integration.

1. (a)

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx \quad = \quad \{\text{ KK }\} = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx = \arcsin(x-1)+C$$

Svar: $\arcsin(x-1)+C$, där C är en godtycklig konstant.

(b)

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{dx}{x(x-1)^2} &= \{\text{ PBU }\} = \int_2^\infty \Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\Big)\,dx = \\ &= \Big[\ln\Big|\frac{x}{x-1}\Big| - \frac{1}{x-1}\Big]_2^\infty = \ln 1 - 0 - \ln 2 + 1 = 1-\ln 2\end{aligned}$$

Svar: $1-\ln 2$.

2. (a) Separering av variabler ger $y^{-3}\,dy = x^2\,dx$ som integreras till $-y^{-2}/2 = x^3/3 + C$. Men $y(1)=1$ så $-1/2 = 1/3 + C$, dvs $C=-5/6$.
Multiplikation med -2 ger $y^{-2} = (5-2x^3)/3$. Invertering och rotdragning ger $y = \pm\sqrt{3/(5-2x^3)}$. Eftersom $y(1)=1$ är bara den positiva lösningen aktuell.
Svar: $y=\sqrt{3/(5-2x^3)}$.

(b) Den homogena ekvationen har den karaktäristiska ekvationen $0=r^2+4$, som har rötterna $r=\pm 2i$. Detta ger $y_h = A\cos 2t + B\sin 2t$.
För att finna en partikulärlösning görs ansatsen $y = a\cos t + b\sin$ som insatt i ekvationen ger $(-a+4a)\cos t + (-b+4b)\sin t = \sin t$, dvs $a=0$ och $b=1/3$. Detta ger $y_p = (1/3)\sin t$.
Allmänna lösningen till ekvationen i uppgiften är $y = y_h + y_p = A\cos 2t + B\sin 2t + (1/3)\sin t$.
Svar: $y = A\cos 2t + B\sin 2t + (1/3)\sin t$, där A och B är godtyckliga konstanter.

3. Låt Q vara uttrycket i uppgiften. Kända Taylorutvecklingar ger då

$$Q \quad = \quad \frac{(2x+4x^2/2!+\cdots)(x^3-x^6/2+\cdots)}{(9x^2/2!-81x^4/4!+\cdots)^2}.$$

Division med x^4 i täljare och nämnare ger

$$Q \quad = \quad \frac{(2+4x/2!+\cdots)(1-x^3/2+\cdots)}{(9/2!-81x^2/4!+\cdots)^2} \to \frac{2}{81/4} = \frac{8}{81},$$

när $x\to 0$.

Svar: Gränsvärdet blir 8/81

4. Vi sätter

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}(x-2)^n$$

och har då

$$\left| a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} \right| = |x-2| \cdot \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} \to |x-2|,$$

när $n \to \infty$.

Alltså är potensserien konvergent när $|x-2| < 1$ och divergent när $|x-2| > 1$. Vi har kvar att undersöka $x = 1$ och $x = 3$ (som löser $|x-2| = 1$).

Vi undersöker

$$p(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Men

$$0 \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$$

och $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ är känd som konvergent. Därför konvergerar $p(1)$ enligt jämförelsekriteriet.

Vi undersöker

$$p(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1},$$

som är alternerande. Eftersom $1/(n^2+1)$ avtar mot 0 när $n \to \infty$ är $p(3)$ konvergent enligt kriteriet för alternerande serier.

Svar: Potensserien är konvergent när $1 \leq x \leq 3$.

5. En liksidig triangel med sida a har en höjd h som enligt Pythagoras sats satisfierar $h^2 + (a/2)^2 = a^2$. Detta ger $h = \sqrt{3}a/2$. Arean av en liksidig triangel är därför $a \cdot h/2 = \sqrt{3}a^2/4$.

Enligt skivformeln ges volymen av $\int_1^4 A(x)\,dx$, där alltså $A(x) = \sqrt{3}x/4$. Volymen blir därför

$$\left[\sqrt{3}x^2/8\right]_1^4 \quad = \quad 16\sqrt{3}/8 - \sqrt{3}/8 = 15\sqrt{3}/8.$$

Svar: $15\sqrt{3}/8$.

6. Vi ser av figuren i uppgiften att $h(t)$ kan beskrivas som $h(t) = t - tu(t-1) = t - (t-1)u(t-1) - 1 \cdot u(t-1)$.

Av tabell framgår att $t \supset 1/s^2$, $1 \cdot u(t-1) \supset e^{-s}/s$ och att $(t-1)u(t-1) \supset e^{-s}/s^2$.

Detta ger oss $h(t) \supset 1/s^2 - e^{-s}(s+1)/s^2$.

Vi sätter $y \supset \tilde{y}$ och har då $y' \supset s\tilde{y}$ samt $y'' \supset s^2\tilde{y}$. Laplacetransformering av ekvationen ger därför

$$(s^2-1)\tilde{y} = 1/s^2 - e^{-s}(s+1)/s^2.$$

Eftersom $s^2 - 1 = (s-1)(s+1)$ har vi efter division

$$\tilde{y} = \frac{1}{s^2(s^2-1)} + e^{-s}\frac{1}{s^2(s-1)}$$

Vi gör en partialbråksuppdelning:

$$\begin{aligned}
\tilde{y} &= -\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2-1} - e^{-s}\Big(-\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\Big) = \\
&= -\frac{1}{s^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} - e^{-s}\Big(\frac{-1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}) \subset \\
&\subset -t + e^t/2 - e^{-t}/2 - u(t-1)(-1/(t-1) - 1 + e^t).
\end{aligned}$$

Svar: $y(t) = -t + e^t/2 - e^{-t}/2 - u(t-1)(-1/(t-1) - 1 + e^t)$.

JAS