MATEMATIK
Chalmers

Hjälpmedel: bifogat formelblad
Tele: Jonas Hartwig
0762-721860
Lärares närvaro i sal: 9.30 och 11.30

Tentamen i MVE 015 Analys i en variabel I, 5 p, 06 12 17, kl 8.30–12.30.

1. Beräkna

$$\text{(a)} \quad \int x\cos x\,dx \qquad \text{(b)} \quad \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^4}}\,dt \quad \text{om den konvergerar.}$$

Motivera i (b) annars att den divergerar. 3p+4p

2. Lös differentialekvationerna

$$\text{(a)} \quad y' + 2xy = (2x+1)e^x,\ y(0) = 0 \qquad \text{(b)} \quad y'' + 2y' + y = (x+1)e^x.$$

3p+4p

3. För vilka värden på x konvergerar potentsserien

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n(2n+1)} x^n?$$

Motivera noga! 6p

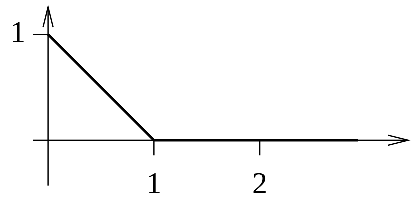
4. När det begränsade området mellan kurvorna $y = 2x(2-x)$ och $y = x$ roterar runt y-axeln uppstår en kropp. Beräkna volymen av den. 6p

5. Bestäm konstanten a så att

$$f(t) = \frac{t\sin t^3}{e^{t^2}\cos t - 1 + at^2}$$

har ett gränsvärde $\neq 0$, när $t \to 0$. Bestäm också gränsvärdet. 6p

6. Lös differentialekvationen $y'' + y' - 2y = u(t-2)h(t-2),\ y(0) = y'(0) = 0$, där $h(t)$ är den funktion som har graf som i figuren nedan.



7. I uppgiften förutsätts en deriverbar parametriserad kurva $(x(t), y(t))$ vara given.
   (a) Hur bestämmer man en riktningsvektor för tangentlinjen i den punkt man har när $t = t_0$. 2p
   (b) Hur beräknas (generellt) längden av kurvan när $a \leq t \leq b$? 2p
   (c) Beräkna längden av kurvan (t^3, t^2) när $0 \leq t \leq 1$. 2p

8. Visa att om potensserien $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ konvergerar när $x = x_0$, så är den absolutkonvergent för alla x sådana att $|x-c| < |x_0 - c|$. 6p

Förslag till lösningar kommer att finnas på kursens webbsida

http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve015/0607/

Betygsgränser: 20p för trea, 30p för fyra och 40p för femma (inklusive bonus från laborationer i MATLAB).

JAS

FORMELBLAD PÅ BAKSIDAN!

Formelblad

Trigonometriska formler

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$

$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

Maclaurinserier

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \quad \text{för alla } x$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots \quad \text{för alla } x$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots \quad \text{för alla } x$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{k} + \cdots \quad \text{när } |x| < 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots \quad \text{när } |x| < 1$$

Laplacetransformen

Räkneregler

$f(t)$	$\tilde{f}(s)$
$f'(t)$	$s\tilde{f}(s) - f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n \tilde{f}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \tilde{f}^{(n)}(s)$
$(f * g)(t)$	$\tilde{f}(s)\tilde{g}(s)$
$f(t+p) = f(t)$ för alla t	$\dfrac{1}{1 - e^{-ps}} \displaystyle\int_0^p f(t) e^{-st}\, dt$
$u(t-a) f(t-a)$ där $a > 0$	$e^{-as} \tilde{f}(s)$
$e^{at} f(t)$	$\tilde{f}(s-a)$

Transformer

$f(t)$	$\tilde{f}(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos bt$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$
$\sin bt$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$