MATEMATIK
Chalmers

Hjälpmedel: bifogat formelblad
Tele: Marcus Warfheimer
0762-721860
Lärares närvaro i sal: 15.00 och 17.00

Tentamen i MVE 015 Analys i en variabel I, 5 p, 06 08 24, kl 14.00–18.00.

1. Beräkna

$$\text{(a)} \quad \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx \qquad \text{(b)} \quad \int_0^1 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+\sin^2\sqrt{x})}\,dx \quad \text{om den konvergerar.}$$

   Motivera i (b) annars att den divergerar. 3p+4p

2. Lös differentialekvationerna

$$\text{(a)} \quad y' - xy^2 = (xy)^2,\ y(0) = 1 \qquad \text{(b)} \quad y'' + 4y' + 3y = xe^{2x}.$$

   3p+4p

3. Avgör om den kontinuerliga funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - \sin x^3}{x^2\cos x} & \text{när} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{när} \quad x = 0. \end{cases}$$

   har ett lokalt maximum eller minimum (eller ingetdera) i $x = 0$. 6p

4. För vilka värden på x konvergerar potensserien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2k+1}?$$

   Motivera noga! 6p

5. När kurvan $y = x^2 + x$, $0 \leq x \leq 1$ roterar runt y-axeln avgränsas en kropp (som innehåller ett segment av y-axeln). Beräkna volymen av den. 6p

6. Lös differentialekvationen

$$y'' + 9y = u(t-1),\ y(0) = y'(0) = 0,$$

   när $t > 0$. 6p

7. I uppgiften förutsätts en deriverbar parametriserad kurva $(x(t), y(t))$ vara given.
   (a) Vad menas med farten till den parametriserade kurvan när $t = t_0$. 2p
   (b) Hur beräknas (generellt) längden av kurvan när $a \leq t \leq b$? 2p
   (c) Beräkna längden av kurvan (t^2, t^3) när $0 \leq t \leq 1$. 2p

8. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler. 6p

Förslag till lösningar kommer att finnas på kursens webbsida

http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve015/0506/

Betygsgränser: 20p för trea, 30p för fyra och 40p för femma (inklusive bonus från laborationer i MATLAB).

JAS

FORMELBLAD PÅ BAKSIDAN!

Formelblad

Trigonometriska formler

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ $\quad$ $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ $\quad$ $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$

$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$ $\quad$ $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$ $\quad$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$ $\quad$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

Maclaurinserier

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots && \text{för alla } x \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots && \text{för alla } x \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots && \text{för alla } x \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{k} + \cdots && \text{när } |x| < 1 \\
\arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots && \text{när } |x| < 1 \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k} x^k + \cdots && \text{när } |x| < 1
\end{aligned}
$$

Lapalcetransformen

Räkneregler

$f(t)$	$\tilde{f}(s)$
$f'(t)$	$s\tilde{f}(s) - f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n \tilde{f}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \tilde{f}^{(n)}(s)$
$(f * g)(t)$	$\tilde{f}(s)\tilde{g}(s)$
$f(t+p) = f(t)$ för alla t	$\dfrac{1}{1 - e^{-ps}} \displaystyle\int_0^p f(t) e^{-st}\, dt$
$u(t-a) f(t-a)$ där $a > 0$	$e^{-as} \tilde{f}(s)$
$e^{at} f(t)$	$\tilde{f}(s-a)$

Transformer

$f(t)$	$\tilde{f}(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos bt$	$\dfrac{s}{s^2 + b^2}$
$\sin bt$	$\dfrac{b}{s^2 + b^2}$