Lösning till MVE 015 Analys i en variabel I, 5 p, 06 08 24.

Förkortningar

KE står för karakteristisk ekvation,

KK står för kvadratkomplettering,

PBU står för partialbråksuppdelning,

PI står för partiell integration.

1. (a)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|\} = \frac{1}{2}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2}\Big(\ln 2 - \ln 1\Big) = \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{2}\ln 2$.

(b)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+\sin^2\sqrt{x})}\,dx &= \{t=\sqrt{x},\ dt = dx/(2\sqrt{x})\} = \int_0^1 \frac{2\cos t}{1+\sin^2 t}\,dt = \\ &= \{s = \sin t,\ ds = \cos t\,dt\} = \int_0^{\sin 1} \frac{2}{1+s^2}\,ds = \\ &= 2\Big[\arctan s\Big]_0^{\sin 1} = 2\arctan(\sin 1).\end{aligned}$$

Svar: $2\arctan(\sin 1)$.

2. (a) Separation av variabler ger $y'/y^2 = x + x^2$, som integreras till $-1/y = x^2/2 + x^3/3 + C$. Eftersom $y(0) = 1$ har vi $C = -1$. Vi löser ut y och får

$$y = \frac{1}{1 - x^2/2 - x^3/3} = \frac{6}{6 - 3x^2 - 2x^3}.$$

Svar: $y = \dfrac{6}{6-3x^2-2x^3}$.

(b) Den homogena ekvationen har den karaktäristiska ekvationen $0 = r^2 + 4r + 3 = (r+3)(r+1)$, som har rötterna $r = -3$ och $r = -1$. Detta ger $y_h = Ae^{-3x} + Be^{-x}$. För att finna en partikulärlösning görs förs substitutionen $y_p = ze^{2x}$. Insättning av detta i ekvationen ger efter förenkling $z'' + 8z' + 15z = x$. Genom insättning av ansatsen $z_p = a + bx$ i detta, ser vi att $z_p = x/15 - 8/15^2 = (15x-8)/15^2$ är en partikulärlösning. Detta ger oss i sin tur $y_p = e^{2x}(15x-8)/225$.
Svar: $y = Ae^{-3x} + Be^{-x} + e^{x}(15x-8)/225$.

3. Maclaurinutveckling ger

$$f(x) = \frac{x^3 - (x^3 - x^9/3! + \cdots)}{x^2(1 - x^2/2 + x^4/4! - \cdots)}.$$

(Här ser vi att $f(x) \to 0 = f(0)$, när $x \to 0$, så att $f(x)$ är kontinuerlig i $x = 0$.) Från detta ser vi att $f(x)/x^7 \to (1/3!)/1 > 0$, när $x \to 0$. Det betyder att $f(x)$ och x^7 har samma teckenväxling i $x = 0$, så att $f(x)$ har varken maximum eller minimum i $x = 0$.

Svar: Varken maximum eller minimum i $x = 0$.

4. Kvotkriteriet leder oss till kvoten

$$\left|\frac{x^{k+1}}{2k+3} \cdot \frac{2k+1}{x^k}\right| = |x|\frac{2k+1}{3k+1} \to |x| \cdot 1,$$

när $k \to \infty$. Kvotkriteriet ger att serien konvergerar när $|x| < 1$ och divergerar när $|x| > 1$.

När $x = -1$ är serien alternerande och konvergerar enligt kriteriet för alternerande serier, eftersom $1/(2k+1)$ **avtar** mot 0 när $k \to \infty$.

När $x = 1$ är serien divergent enligt jämförelse kriteriet (t.ex.) eftersom

$$\frac{1}{2k+1} > \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k}$$

och den harmoniska serien $\sum_k (1/k)$ är divergent.

Svar: När $-1 \leq x < 1$.

5. Uppdelning av kroppen i skivor vinkelräta mot y-axeln och skivformeln ger att volymen är $\int_0^2 A(y)\,dy$, där $A(y)$ är arean av en cirkelskiva med radie x som löser ekvationen $x^2+x-y = 0$. Lösning av denna andragradsekvation ger $x = -1/2 \pm \sqrt{1/4+y}$, där bara plustecknet är aktuellt eftersom $0 \leq x \leq 1$. Detta ger $A(y) = \pi x^2 = \pi(1/4 - \sqrt{1/4+y} + 1/4 + y)$ eller $A(y) = \pi(1/2 + y - \sqrt{1/4+y})$. Kroppens volym är alltså

$$\begin{aligned} \pi \int_0^1 (1/2 + y - \sqrt{1/4+y})\,dy &= \pi\Big[y/2 + y^2/2 - 2(1/4+y)^{3/2}/3\Big]_0^2 = \\ &= \pi\Big(1 + 2 - \frac{2}{3}\Big(\frac{3}{2}\Big)^3 + \frac{2}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^3\Big) = \pi(3 - 9/4 + 1/12) = \\ &= \pi(5/6) \end{aligned}$$

Svar: $5\pi/6$.

6. Vi har Laplacetransformerna

$$\begin{aligned} y' &\supset s\tilde{y} - y(0) = s\tilde{y} \\ y'' &\supset s\tilde{y'} - y'(0) = s^2\tilde{y} \\ u(t-1) \cdot 1 &\supset e^{-s}(1/s), \end{aligned}$$

så ekvationen blir efter transformering $(s^2 + 9s)\tilde{y} = e^{-s}/s$ och $\tilde{y} = e^{-s}(1/(s(s^2+9s)))$. PBU och invers transformering ger oss

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{(s+9)} = \frac{1/9}{s^2} - \frac{1/81}{s} + \frac{1/81}{s+9} = \\ \subset \quad t/9 - 1/81 + e^{-9t}/81. \end{aligned}$$

Av detta följer att

$$\begin{aligned} \tilde{y} &\subset u(t-1)\Big(\frac{t-1}{9} - \frac{1}{81} + \frac{e^{-9(t-1)}}{81}\Big) = \\ &= \frac{1}{81}u(t-1)(9t - 10 + e^{-9(t-1)}). \end{aligned}$$

Svar: $y(t) = u(t-1)(9t - 10 + e^{-9(t-1)})/81$.

7. (c) Med $x(t) = t^2,\ y(t) = t^3$ har vi $x'(t) = 2t,\ y'(t) = 3t^2$ så båglängden ges av

$$\begin{aligned}\int_0^1 |(x'(t), y'(t))|\,dt &= \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 9t^4}\,dt = \int_0^1 t\sqrt{4 + 9t^2}\,dt = \\ &= (2/3)(1/9)(1/2)\Big[(4 + 9t^2)^{3/2}\Big]_0^1 = (1/27)(13\sqrt{13} - 8).\end{aligned}$$

Svar: $(13\sqrt{13} - 8)/27$.

JAS