MATEMATIK
Chalmers

Hjälpmedel: bifogat formelblad
Tele: David Rydh/Henrik Säppenen
0762-721860
Lärares närvaro i sal: 9.30 och 11.30

Tentamen i MVE 015 Analys i en variabel I, 5 p, 06 04 22, kl 8.30–12.30.

1. Beräkna

   (a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{2t^2+t}$ om den konvergerar. (b) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \sqrt{t}\cos(\sqrt{t})\,dt.$

   Motivera i (a) annars att den divergerar. 4p+4p

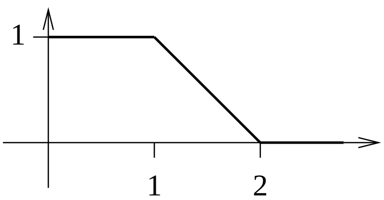
2. När kurvan $y = \sqrt{1+x^2}$, $0 \le x \le 1$ roterar kring y-axeln uppstår en kropp. Beräkna volymen av den. 6p

3. Lös differentialekvationen
$$y'' + y' - 2y = e^x.$$
6p

4. Bestäm konstanten a så att
$$f(x) = \frac{xe^{x^2} + a\tan x}{x^2\ln(1+x)}$$
har ett gränsvärde när $x \to 0$. Bestäm också detta gränsvärde. 6p

5. Avgör om serien
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(2k-1)9^k}$$
konvergerar. Bestäm dess värde i så fall. 6p

6. Låt $f(t)$ vara den funktion vars graf illustreras i figuren.



   Bestäm Laplacetransformen till $f(t)$. Bestäm också Laplacetransformen till den lösning till $y''(t) + y(t) = f(t)$ som uppfyller $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$. 3p+3p

7. (a) Vad menas med en över- och en undertrappa till funktionen $f(x)$ på det begränsade intervallet $[a, b]$? 2p

   (b) Hur definieras talet $\int_a^b f(x)\,dx$? 2p

   (c) Beräkna $\int_0^1 x\,dx$ *enligt definitionen.* 2p

8. Formulera och bevisa ett kriterium för konvergens av en alternerande serie. 6p

Förslag till lösningar kommer att finnas på kursens webbsida

http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve015/0506/

Betygsgränser: 20p för trea, 30p för fyra och 40p för femma (inklusive bonus från laborationer i MATLAB).

JAS

FORMELBLAD PÅ BAKSIDAN!

Formelblad

Trigonometriska formler

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$

$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

Maclaurinserier

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots && \text{för alla } x \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots && \text{för alla } x \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots && \text{för alla } x \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{k} + \cdots && \text{när } |x| < 1 \\
\arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots && \text{när } |x| < 1 \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k} x^k + \cdots && \text{när } |x| < 1
\end{aligned}$$

Lapalcetransformen

Räkneregler

$f(t)$	$\tilde{f}(s)$
$f'(t)$	$s\tilde{f}(s) - f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n \tilde{f}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \tilde{f}^{(n)}(s)$
$(f * g)(t)$	$\tilde{f}(s)\tilde{g}(s)$
$f(t+p) = f(t)$ för alla t	$\dfrac{1}{1 - e^{-ps}} \displaystyle\int_0^p f(t) e^{-st}\, dt$
$u(t-a) f(t-a)$ där $a > 0$	$e^{-as} \tilde{f}(s)$
$e^{at} f(t)$	$\tilde{f}(s-a)$

Transformer

$f(t)$	$\tilde{f}(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos bt$	$\dfrac{s}{s^2 + b^2}$
$\sin bt$	$\dfrac{b}{s^2 + b^2}$