Lösning till MVE 015 Analys i en variabel I, 5 p, 06 04 22.

Förkortningar

KE står för karakteristisk ekvation,

KK står för kvadratkomplettering,

PBU står för partialbråksuppdelning,

PI står för partiell integration.

1. (a)

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dt}{t(2t+1)} &= \{\text{ PBU }\} = \int_1^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{2t+1}\right) dt = \\ &= \left[\ln\left(\frac{t}{2t+1}\right)\right]_1^\infty = \ln(1/2) - \ln(1/3) = \ln(3/2)\end{aligned}$$

Svar: $\ln(3/2)$.

(b)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi^2} \sqrt{t}\cos\sqrt{t}\,dt &= \{s = \sqrt{t},\ 2s\,ds = dt\} = \int_0^\pi 2s^2\cos s\,ds = \\ &= \{\text{ PI }\} = [2s^2\sin s]_0^\pi - \int_0^\pi 4s\sin s\,ds = \\ &= \{\text{ PI }\} = 0 - \left([-4s\cos s]_0^\pi + \int_0^\pi 4\cos s\,ds\right) = \\ &= -4\pi + [4\sin s]_0^\pi = -4\pi - 0.\end{aligned}$$

Svar: -4π.

2. Vi delar upp kroppen i cirkelskivor vinkelräta mot y-axeln och låter $A(y)$ vara arean av en sådan. Radien i skivan är för fix y koordinat x där $y = \sqrt{x^2+1}$, $x \geq 0$, dvs $x = \sqrt{y^2-1}$. Detta ger oss $A(y) = \pi x^2 = \pi(y^2-1)$. När $x = 0$ är $y = 1$ och när $x = 1$ är $y = \sqrt{2}$. Skivformeln ger nu att volymen är

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} A(y)\,dy &= \pi\int_1^{\sqrt{2}} (y^2-1)\,dy = \pi[y^3/3 - y]_1^{\sqrt{2}} = \\ &= \pi(2\sqrt{2}/3 - \sqrt{2} - 1/3 + 1) = \pi(2-\sqrt{2})/3.\end{aligned}$$

Svar: $\pi(2-\sqrt{2})/3$.

3. Den homogena ekvationen har den karaktäristiska ekvationen $0 = r^2+r-2 = (r-1)(r+2)$, som har rötterna 1 och -2. Detta ger $y_h = Ae^x + Be^{-2x}$, där A och B är godtyckliga konstanter.

För att finna en partikulärlösning ansätts $y_p = z_p e^x$. Insättning av detta i ekvationen ger efter förenkling $z_p'' + 3z_p' = 1$, så vi kan välja $z_p = x/3$. Detta ger $y_p = xe^x/3$ och $y = Ae^x + Be^{-2x} + xe^{-2x}/3$.

Svar: $y = Ae^x + Be^{-2x} + xe^x/3$.

4. Vi har ingen formel för potensserieutveckling av $\tan x$ kring $x = 0$ så vi förlänger uttrycket med $\cos x$ och får att vi ska bestämma a så att

$$f(x) = \frac{xe^{x^2}\cos x + a\sin x}{x^2\ln(1+x)\cos x}$$

har ett gränsvärde när $x \to 0$. Potensserieutveckling i täljare respektive nämnare ger

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(1+x^2+x^4/2+\cdots)(1-x^2/2-x^4/4!+\cdots)+a(x-x^3/3!+x^5/5!+\cdots)}{x^2(x-x^2/2+x^3/3-\cdots)(1-x^2/2+x^4/4!+\cdots)} = \\ &= \frac{(1+a)x+(1/2+1/3!)x^3+\cdots}{x^3+\cdots}. \end{aligned}$$

Av detta ser vi att vi ska välja $a = -1$ och att gränsvärdet då blir $1/2 + 1/3! = 2/3$ när $x \to 0$.

Svar: $a = -1$ och gränsvärdet blir då $2/3$.

5. Vi ser att serien är alternerande och att $1/(k(2k-1)9^k)$ avtar mot 0. Alltså är serien konvergent.

Sätter vi

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k(2k-1)}$$

är den sökta summan $2f(1/3)$.

Vi har $f(0) = 0$ och

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{2k-1} = \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = -\arctan x, \end{aligned}$$

där den sista likheten, som är giltig när $|x| < 1$ hämtats ur tabell. Detta ger

$$\begin{aligned} f(x) &= -\int \arctan x\,dx = \{\text{ PI }\} = -x\arctan x + \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \\ &= -x\arctan x + \ln(1+x^2)/2 + C, \end{aligned}$$

där vi ska välja $C = 0$, eftersom $f(0) = 0$. Seriens summa är alltså

$$2f(1/3) = -2\arctan(1/3)/3 + \ln(10/9).$$

Svar: $-(2/3)\arctan(1/3) + \ln(10/9)$.

6. Vi beräknar Laplacetransformen till $f(t)$ enligt definitionen och använder grafen för att se att

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^1 e^{-st}\,dt + \int_1^2 (2-t)e^{-st}\,dt = \\ &= \{\text{ PI }\} = [-e^{-st}/s]_0^1 + [-(2-t)e^{-st}/s]_1^2 - \int_1^2 (e^{-st}/s)\,dt = \\ &= -e^{-s}/s + 1/s + e^{-s}/s + [e^{-st}/s^2]_1^2 = -e^{-s}/s + 1/s + e^{-s}/s + e^{-2s}/s^2 - e^{-s}/s^2 = \\ &= 1/s + (e^{-2s} - e^{-s})/s^2. \end{aligned}$$

Laplacetransformering av differentialekvationen $y'' + y = f$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ ger $s^2\tilde{y} - y'(0) + \tilde{y} = \tilde{f}$. Detta ger

$$\tilde{y} = \frac{s^2 + s + e^{-2s} - e^{-s}}{s^2(s^2+1)}.$$

Svar: $\tilde{f}(s) = 1/s + (e^{-2s} - e^{-s})/s^2$ och $\tilde{y}(s) = (s^2 + s + e^{-2s} - e^{-s})/(s^2(s^2+1))$.

7. (c) Vi delar in intervallet $[0, 1]$ med delningspunkterna k/n, $k = 0, \ldots, n$. Detta ger oss undertrappan

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k/n)(1/n) = (1/n^2)((n-1)n)/2 = (1 - 1/n)/2$$

och övertrappan

$$\sum_{k=1}^{n}(k/n)(1/n) = (1/n^2)((n+1)n)/2 = (1 + 1/n)/2.$$

Eftersom skillnaden mellan dessa är $1/n$ och $1/n \to 0$ när $x \to 0$, kan det högst finnas ett tal mellan alla över– och undertrappor. Alltså finns integralen. Det enda tal som ligger mellan alla över och undertrappor av formen ovan är $1/2$, så det är integralens värde.

Svar: $1/2$.

JAS