MATEMATIK
Chalmers

Hjälpmedel: bifogat formelblad
Tele: Milena Anguelova
0762-721860
Lärares närvaro i sal: 9.30 och 11.30

Tentamen i MVE 015 Analys i en variabel I, 5 p, 05 12 12, kl 8.30–12.30.

1. Beräkna

$$\text{(a)} \quad \int \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx \qquad \text{(b)} \quad \int_1^\infty \frac{\arctan t}{t^2}\,dt \qquad \text{om den konvergerar.}$$

Motivera i (b) annars att den divergerar. 3p+4p

2. Lös differentialekvationerna

$$\text{(a)} \quad (1+x^2)y' - x\sqrt{y} = 0,\ y(0)=1 \qquad \text{(b)} \quad y'' - 2y' + y = x,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=-1.$$

3p+4p

3. Bestäm Taylorpolynomet av ordning 3 kring $x = 4$ till

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

6p

4. Avgör om $f(x) = e^{x^4} - 1 - x^2\sin(x^2)$ har ett lokalt maximum eller minimum (eller ingetdera) i $x = 0$. 6p

5. Motivera att serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3(2k+1)2^{2k+1}}$$

är konvergent och uttryck dess summa med hjälp av elementära funktioner. Är serien absolutkonvergent? Motivera! 6p

6. Strömmen $y(t)$ i en elektrisk krets vid pålagd spänning $f(t)$ löser ekvationen

$$y'(t) + 4y(t) + 5\int_0^t y(\xi)\,d\xi = f(t),$$

när $t \geq 0$. Man vet att $y(0) = f(0) = 0$. Bestäm Laplacetransformen $\tilde{y}(s)$ till y med hjälp av Laplacetransformen för $f(t)$. Vad är $y(t)$ om $f(t) = u(t-1)e^{1-t}$? 6p

7. I uppgiften förutsätts en deriverbar parametriserad kurva $(x(t), y(t))$ vara given.
   (a) Vad menas med farten till den parametriserade kurvan när $t = t_0$. 2p
   (b) Hur beräknas (generellt) längden av kurvan när $a \leq t \leq b$? 2p
   (c) Beräkna längden av kurvan (t^2, t^3) när $0 \leq t \leq 1$. 2p

8. Visa att en absolutkonvergent serie är konvergent. 6p

Förslag till lösningar kommer att finnas på kursens webbsida

http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve015/0506/

Betygsgränser: 20p för trea, 30p för fyra och 40p för femma (inklusive bonus från laborationer i MATLAB).

JAS

FORMELBLAD PÅ BAKSIDAN!

Formelblad

Trigonometriska formler

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ $\quad$ $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ $\quad$ $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$

$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$ $\quad$ $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$ $\quad$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$ $\quad$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

Maclaurinserier

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots && \text{för alla } x \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots && \text{för alla } x \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots && \text{för alla } x \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{k} + \cdots && \text{när } |x| < 1 \\
\arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots && \text{när } |x| < 1 \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k} x^k + \cdots && \text{när } |x| < 1
\end{aligned}
$$

Lapalcetransformen

Räkneregler

$f(t)$	$\tilde{f}(s)$
$f'(t)$	$s\tilde{f}(s) - f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n \tilde{f}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \tilde{f}^{(n)}(s)$
$(f * g)(t)$	$\tilde{f}(s)\tilde{g}(s)$
$f(t+p) = f(t)$ för alla t	$\dfrac{1}{1-e^{-ps}} \displaystyle\int_0^p f(t) e^{-st}\, dt$
$u(t-a) f(t-a)$ där $a > 0$	$e^{-as} \tilde{f}(s)$
$e^{at} f(t)$	$\tilde{f}(s-a)$

Transformer

$f(t)$	$\tilde{f}(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos bt$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$
$\sin bt$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$