Lösning till MVE 015 Analys i en variabel I, 5 p, 05 12 12.

Förkortningar

KE står för karakteristisk ekvation,

KK står för kvadratkomplettering,

PBU står för partialbråksuppdelning,

PI står för partiell integration.

1. (a)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx &= \{\sin^2 x = 1-\cos^2 x\} = \int \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}\,dx = \\ &= \{t=\cos x,\ dt=-\sin x\,dx\} = \int \frac{dt}{t^2-4} = \\ &= \{\text{ PBU }\} = \frac{1}{4}\int\Big(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\Big)\,dt = \frac{1}{4}\ln\Big|\frac{t-2}{t+2}\Big| + C\end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{4}\ln\Big(\frac{2-\cos x}{\cos x+2}\Big) + C$ där C är en godtycklig konstant.

(b)

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\arctan t\,dt}{t^2} &= \{\text{ PI }\} = -\Big[\frac{1}{t}\arctan t\Big]_1^\infty + \int_1^\infty \Big(\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+t^2}\Big)\,dt = \\ &= \{\text{ PBU }\} = 0 + \arctan(1) + \int_1^\infty \Big(\frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2}\Big)\,dt = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\Big[\ln\Big|\frac{t^2}{1+t^2}\Big|\Big]_1^\infty = \frac{\pi}{4} + (\ln(1)-\ln(1/2))/2 = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

Svar: $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$

2. (a) Separation av variabler ger $y'/\sqrt{y} = x/(1+x^2)$, som integreras till $2\sqrt{y} = (1/2)\ln(1+x^2)+C$. Eftersom $y(0)=1$ har vi $C=2$.
Vi löser ut y och får $y = ((1/4)\ln(1+x^2)+1)^2$.
Svar: $y = (\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+1)^2.$

(b) Den homogena ekvationen har den karaktäristiska ekvationen $0 = r^2-2r+1 = (r-1)^2$, som har dubbelroten 1. Detta ger $y_h = (Ax+B)e^x$.
För att finna en partikulärlösning ansätts $y_p = ax+b$. Insättning av detta i ekvationen ger efter förenkling $ax+(b-2a)$, så vi ska välja $a=1$ och $b=2$. Detta ger $y_p = x+2$ och $y = (Ax+B)e^x + x + 2$.
Villkoren $0 = y(0)$ och $-1 = y'(0)$ ger nu $0 = B+2$ respektive $-1 = A+B+1$, så $A=0$ och $B=-2$
Svar: $y = -2e^x + x + 2.$

3. Man har den geometriska serien $1/(1+t) = 1-t+t^2-t^3+\cdots$.

Detta ger

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{5+(x-4)} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+(x-4)/5} = \\ &= = \frac{1}{5}\Big(1-(\frac{x-4}{5})+(\frac{x-4}{5})^2-(\frac{x-4}{5})^3+\cdots\Big).\end{aligned}$$

Svar: $1/5 - (x-4)/25 + (x-4)^2/125 - (x-4)^3/625$.

4. Vi har $e^t = 1 + t + t^2/2 + t^3/3! + \cdots$ och $\sin t = t - t^3/3! + t^5/5! + \cdots$.

   Detta ger att $f(x) - f(0) = e^{x^4} - 1 - x^2\sin(x^2) - 0 = (1/2 + 1/3!)x^8 + \cdots$.

   Från detta följer att $(f(x) - f(0))/x^8 \to (1/2 + 1/3!) > 0$, när $x \to 0$. Det betyder att $f(x) - f(0)$ har samma tecken som x^8 i närheten av $x = 0$. Alltså ett lokalt minimum i $x = 0$.

   Svar: Lokalt minimum.

5. Vi ser att serien är alternerande och att $a_k = 1/(3(2k+1)2^{2k+1})$ avtar mot noll när $k \to \infty$. Serien är allstå konvergent enligt konvergenskriteriet för alternerande serier. Sätt

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3(2k+1)} x^{2k+1}.$$

   Vi ska då beräkna $P(1/2)$.

   Derivering ger

$$P'(x) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x^2)^k = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

   Eftersom $P(0) = 0$, ger integrering nu att $P(x) = (1/3)\arctan(x)$.

   (Alternativt har man direkt från formelbladet att $P(x) = (1/3)\arctan(x)$.)

   Absolutbeloppet av seriens termer nummer k är a_k och

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3(2k+1)2^{2k+1}}{3(2k+3)2^{2k+3}} = \Big(\frac{2k+1}{2k+3}\Big)^2 \cdot \frac{1}{4} \to 1 \cdot \frac{1}{4} < 1,$$

   när $k \to \infty$. Alltså är serien absolutkonvergent enligt kvotkriteriet. (Alternativt kan man säga att $1/2$ ligger i det inre av P:s konvergensintervall och att serien därför är konvergent.)

   Svar: $\arctan(1/2)/3$.

6. Vi observerar att integralen är $1 * y$ så Laplacetransformering av ekvationen ger

$$s\tilde{y} + 4\tilde{y} + 5\frac{1}{s}\tilde{y} = \tilde{f},$$

   som ger

$$\tilde{y} = \frac{s}{s^2+4s+5}\tilde{f}.$$

   Eftersom $e^{-t} \supset 1/(s+1)$ gäller enligt förskjutningsregel att $u(t-1)e^{-(t-1)}, \supset e^{-s}/(s+1)$, så

$$\begin{aligned}
\tilde{y} &= e^{-s}\frac{s}{s^2+4s+5}\cdot\frac{1}{s+1} = e^{-s}\frac{s}{((s+2)^2+1)(s+1)}\{\text{ PBU }\} = \\
&= e^{-s}\Big(\frac{s/2+5/2}{(s+2)^2+1} - \frac{1/2}{s+1}\Big) = e^{-s}\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(s+2)^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1}\Big).
\end{aligned}$$

   Enligt invers Laplacetransformering och de båda förskjutningsreglerna ger detta

$$y(t) = u(t-1)\Big(\frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\cos(t-1) + \frac{3}{2}e^{-2(t-1)}\sin(t-1) - \frac{1}{2}e^{-(t-1)}\Big)$$

   Svar: $\tilde{y} = s\tilde{f}/(s^2+4s+5)$ och $y(t) = u(t-1)(e^{2-2t}(\cos(t-1)/2 + 3\sin(t-1)/2) - e^{1-t}/2)$.

7. (c) Med $x(t) = t^2,\ y(t) = t^3$ har vi $x'(t) = 2t,\ y'(t) = 3t^2$ så båglängden ges av

$$\begin{aligned}\int_0^1 |(x'(t), y'(t))|\,dt &= \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 9t^4}\,dt = \int_0^1 t\sqrt{4 + 9t^2}\,dt = \\ &= (2/3)(1/9)(1/2)\Big[(4 + 9t^2)^{3/2}\Big]_0^1 = (1/27)(13\sqrt{13} - 8).\end{aligned}$$

Svar: $(13\sqrt{13} - 8)/27$.

JAS