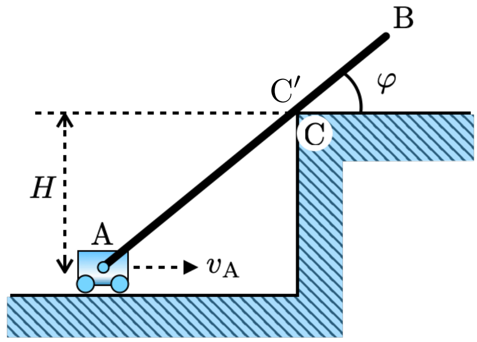
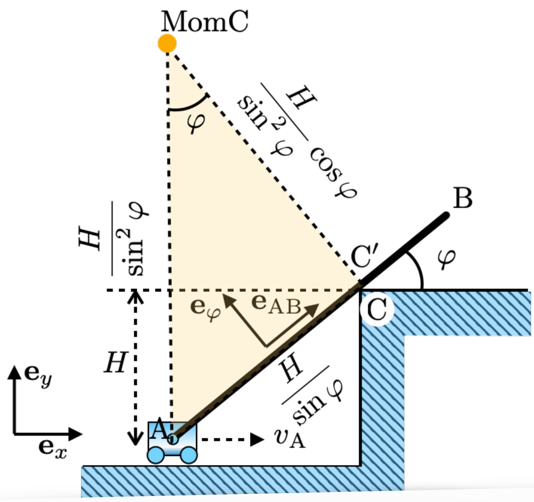
Lösningsskisser till tentamen MMS215 2022-01-03

1. En stel rak stång AB av längden L är i änden A vridbart infäst i en liten vagn. Vagnen rör sig med konstant hastighet v_{A} över ett horisontalplan som figuren antyder. Stången är också i kontakt med (och glider mot) ett hörn C (som figuren också visar). C är beläget på höjden H över A.



Bestäm beloppet av accelerationsvektorn för (den stångfixa) punkten C′ som är i kontakt med hörnet C i det ögonblick figuren visar, då alltså stångens vinkel mot horisontalplanet är φ. (10p)

Konstruera stångens momentancentrum på vanligt vis, och använd trigonometri för att bestämma sidornas längder i den rätvinkliga triangeln AC′MomC som i figuren till höger.



AB:s vinkelhastighet kan vi då bestämma:

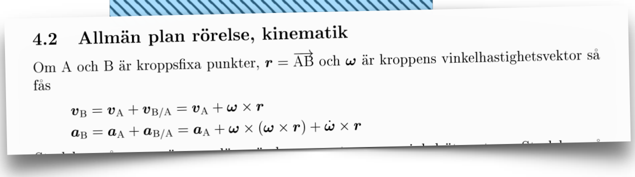
$$v_{\mathrm{A}} = \frac{H}{\sin^2\varphi}\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_{\mathrm{A}}\sin^2\varphi}{H}$$

så rotationshastighetsvektorn är

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_z \frac{v_{\mathrm{A}}\sin^2\varphi}{H}$$

Enligt formelsamlingen är den sökta accelerationsvektorn given av

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C'}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{\mathrm{AC'}}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$$


4.2 Allmän plan rörelse, kinematik

Om A och B är kroppsfixa punkter, $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ och $\boldsymbol{\omega}$ är kroppens vinkelhastighetsvektor så fås

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{B/A}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{B/A}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}$$

Här är $\boldsymbol{a}_{\mathrm{A}} = \mathbf{0}$ och

$$\overrightarrow{\mathrm{AC'}} = \frac{H}{\sin\varphi}\mathbf{e}_{\mathrm{AB}} = \frac{H}{\sin\varphi}(\mathbf{e}_x\cos\varphi + \mathbf{e}_y\sin\varphi)$$

Dessutom har vi

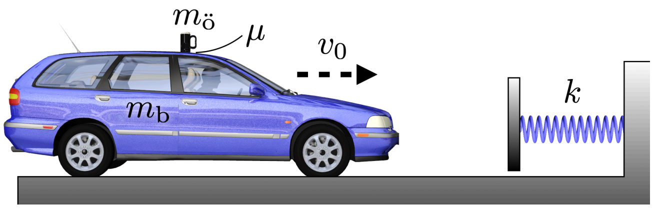
$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{e}_z\frac{v_{\mathrm{A}}}{H}2\sin\varphi\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} = \mathbf{e}_z\frac{2v_{\mathrm{A}}}{H}\sin\varphi\cos\varphi\cdot\omega = \mathbf{e}_z\frac{2v_{\mathrm{A}}}{H}\sin\varphi\cos\varphi\cdot\frac{v_{\mathrm{A}}\sin^2\varphi}{H}$$
$$= \mathbf{e}_z\frac{2v_{\mathrm{A}}^2}{H^2}\sin^3\varphi\cos\varphi$$

så efter litet algebra har vi

Svar:
$$|\boldsymbol{a}_{\mathrm{C'}}| = \frac{v_{\mathrm{A}}^2}{H}\sqrt{\frac{(3\cos 2\varphi + 5)\sin^4\varphi}{2}}$$

■

2. Kapten Obsolet har glömt att han ställde ett ölglas (lättöl, givetvis) på bilets tak innan han åkte iväg. När han erinrar sig detta misstag under färden blir han så distraherad att han med hastigheten v_0 råkar köra in i en fjädrande buffert så som figuren visar.



Mellan glas och biltak råder den statiska friktionskoefficienten μ. Bilens massa (inklusive Kaptens massa) är m_b, och ölglaset (med lättöl) har massan $m_ö$. Bufferten har försumbar massa, och fjäderkonstanten k. Kapten kommer sig inte för att bromsa, så bilen rör sig med försumbart rullmotstånd från underlaget.

Hur stor får v_0 högst vara för att ölglaset inte skall börja glida under kollisionsförloppet mellan bil och buffert? (10p)

Låt x vara fjäderns hoptryckning med $x(0) = 0$. Så länge glaset inte glider har vi

$$-kx + F_f = m_b\ddot{x}$$
$$-F_f = m_ö\ddot{x} \qquad (*)$$

där F_f är friktionskraften mellan glas och bil. Eliminerar vi friktionskraften ur dessa två ekvationer får vi en svängningsekvation

$$\ddot{x} + \frac{k}{m_b + m_ö}x = 0$$

med begynnelsevillkoren

$$\dot{x}(0) = v_0, \quad x(0) = 0.$$

Lösningen är $x(t) = \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \quad \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_b + m_ö}}$.

Det *största* värde som beloppet av accelerationen antar är då $v_0\,\omega$. Enligt (*) ovan är då

$$|F_f|_{\max} = v_0\, m_ö\,\omega$$

Friktionsvillkoret kräver då att

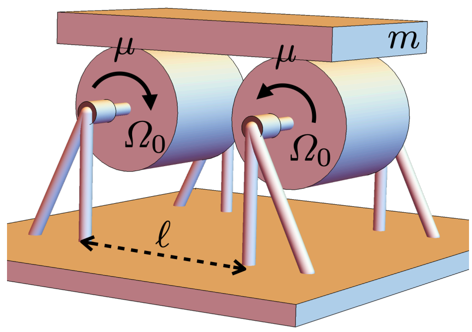
$$\mu\, m_ö\, g = \mu N \geq |F_f|_{\max} = v_0\, m_ö\,\omega \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu\, g}{\omega} \geq v_0$$

Svar:

$$v_0 \leq \mu\, g\sqrt{\frac{m_b + m_ö}{k}}$$

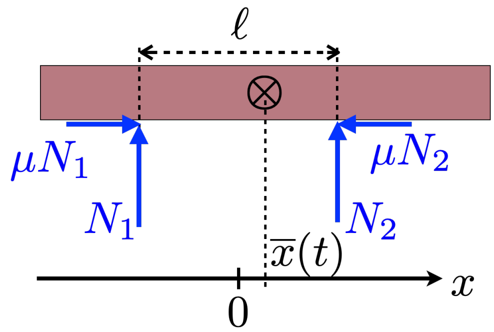
■

3. En plan homogen skiva av massan m ligger på två horisontella cylindrar, som figuren visar. Cylindrarna, båda av radien r, och med avståndet ℓ mellan deras respektive rotationsaxlar, bringas att rotera kring sina horisontella symmetriaxlar med konstanta vinkelhastigheter, båda av storleken Ω_0 men inbördes motriktade som figuren också visar. Kontakten mellan cylindrarna och skivan är **sträv**, med den kinetiska friktionskoefficienten μ. Visa att skivan kommer att kunna utföra fria svängningar i horisontalled, och bestäm svängningens naturliga frekvens. (10p)



Frilägg skivan:

$$\begin{cases} \rightarrow: & \mu N_1 - \mu N_2 = m\ddot{\overline{x}} & (1) \\ \uparrow: & mg - (N_1 + N_2) = 0 & (2) \\ \curvearrowleft\!\!\otimes: & -N_1(\tfrac{1}{2}\ell + \overline{x}) + N_2(\tfrac{1}{2}\ell - \overline{x}) = 0 & (3) \end{cases}$$



Detta kan skrivas

$$\begin{cases} m\ddot{\overline{x}} - \mu(N_1 - N_2) = 0 & (1') \\ (N_1 + N_2) = mg & (2') \\ -\tfrac{1}{2}\ell(N_1 - N_2) = (N_1 + N_2)\overline{x} & (3') \end{cases}$$

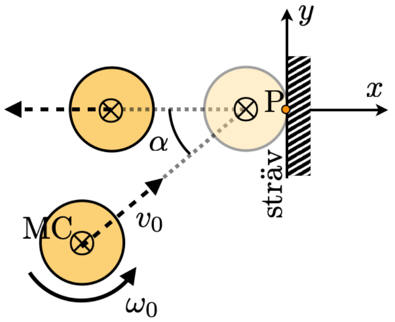
[Vi antar att Ω_0 är så stor att friktionskrafterna i de båda kontaktpunkterna är riktade som figuren anger.]

vilket strax ger oss $\ddot{\overline{x}} + \dfrac{2\mu g}{\ell}\overline{x} = 0$ som ju är en svängningsekvation med den naturliga vinkelfrekvensen

$$\omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{\ell}}$$

■

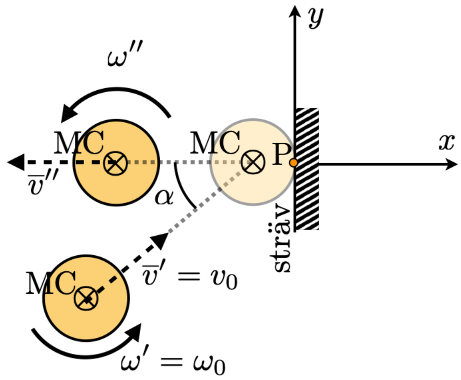
4.



En cirkulärcylindrisk homogen puck av massan m roterar med vinkelhastigheten ω_0 medan den glider friktionsfritt på isen med tyngdpunktshastigheten v_0, som figuren visar. Pucken träffar den ***sträva*** sargen under infallsvinkel α enlig figuren. På grund av den sträva kontakten kan pucken ***inte glida*** mot sargen under stöten. Stötkoefficienten mellan puck och sarg är e.

Efter stöten rör sig pucken ***vinkelrätt*** mot sargen.

Vad måste den initiala vinkelhastigheten ω_0 vara för att detta skall vara möjligt? (10p)



Låt oss beteckna x- resp. y-komponenten av stötimpulsen från sargen på pucken med $\hat{F}_x$ resp. $\hat{F}_y$.

Impulslagen ger då

$$m(-\overline{v}'') - m\,v_0\cos\alpha = \hat{F}_x \qquad (1)$$

$$m\cdot 0 - m\,v_0\,\sin\alpha = \hat{F}_y \qquad (2)$$

medan impulsmomentlagen ger

$$\tfrac{1}{2}mr^2\,(\omega'' - \omega_0) = r\,\hat{F}_y \ . \qquad (3)$$

I kollisionspunkten P ger stötlagen

$$e = \frac{0-(-\overline{v}'')}{v_0\cos\alpha - 0} = \frac{\overline{v}''}{v_0\cos\alpha} \qquad (4)$$

där vi använt att $v''_{x\mathrm{P}} = -\overline{v}''$.

Eftersom kontakten mellan puck och sarg är sträv och utan glidning måste vidare

$$0 = v''_{y\mathrm{P}} = r\omega''. \qquad (5)$$

(2), (3) och (5) ger

$$v_0\,\sin\alpha = \tfrac{1}{2}r\,\omega_0 \qquad (6)$$

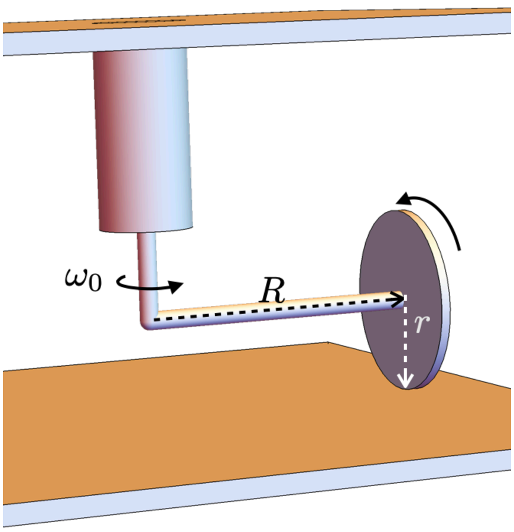
Därmed har vi villkoret på den initiala vinkelhastigheten ω_0 . (Men vart tog (1) och (4) vägen? De behövs bara för att bestämma $\overline{v}''$ och $\hat{F}_x$, men dessa efterfrågas inte i uppgiften.)

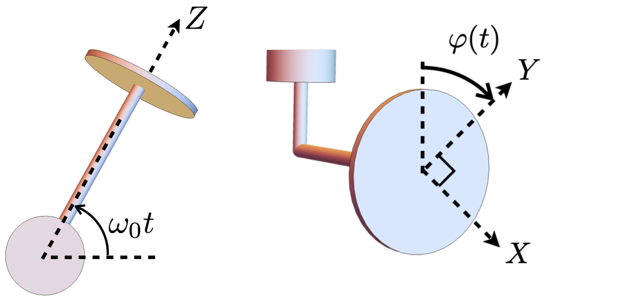
Svar:

$$\omega_0 = \frac{2v_0}{r}\sin\alpha$$

■

5.





Ett hjul rullar utan glidning på ett stelt orubbligt horisontalplan enligt figuren. Hjulet, som har radien r, är homogent och har massan m. De stela axlarna, med mått enligt figuren till vänster, har försumbara massor, och den vertikala axeln roterar med **konstant** vinkelhastighet ω_0. Hjulets tjocklek kan försummas.

Ett kroppsfixt koordinatsystem $AXYZ$ med origo i hjulets masscentrum A är givet i de två högra figurerna.

a) Bestäm $\varphi(t)$. (2p)

b) Bestäm (för hjulet) $\omega_X(t)$, $\omega_Y(t)$ och $\omega_Z(t)$. (3p)

c) Bestäm (för hjulet) den yttre momentsummans X-, Y- och Z-komponenter. (5p)

Ledning c): Använd Eulers ekvationer nedan.

Eulers ekvationer

$$\begin{aligned} I_X\,\dot\omega_X - (I_Y - I_Z)\omega_Y\omega_Z &= \Sigma M_{AX} \\ I_Y\,\dot\omega_Y - (I_Z - I_X)\omega_Z\omega_X &= \Sigma M_{AY} \\ I_Z\,\dot\omega_Z - (I_X - I_Y)\omega_X\omega_Y &= \Sigma M_{AZ} \end{aligned}$$

$AXYZ$ är ett kroppsfixt huvudtröghetssystem.

Eftersom hjulet rullar utan glidning är

$$R\,\omega_0 = r\,\dot\varphi(t),$$

så, om vi godtyckligt sätter $\varphi(0) = 0$, har vi

Svar a):
$$\varphi(t) = \frac{R}{r}\omega_0 t$$

Låt $\mathbf{e}_y$ vara en riktningsvektor som pekar rakt uppåt i figuren. Då kan hjulets rotationsvektor skrivas

$$\boldsymbol\omega = \mathbf{e}_y\,\omega_0 + \mathbf{e}_Z\,(-\dot\varphi(t)) = \mathbf{e}_y\,\omega_0 - \mathbf{e}_Z\,\frac{R}{r}\omega_0$$

och enligt figuren längst uppe till höger i uppgiften är

$$\mathbf{e}_Y \bullet \mathbf{e}_y = \cos\varphi(t),\;\; \mathbf{e}_X \bullet \mathbf{e}_y = -\sin\varphi(t).$$

Alltså är

Svar b):
$$\begin{aligned} \omega_X(t) &= \mathbf{e}_X \bullet \boldsymbol\omega = -\omega_0\sin\varphi(t) = -\omega_0\,\sin\left(\frac{R}{r}\omega_0 t\right) \\ \omega_Y(t) &= \mathbf{e}_Y \bullet \boldsymbol\omega = \omega_0\cos\varphi(t) = \omega_0\,\cos\left(\frac{R}{r}\omega_0 t\right) \\ \omega_Z(t) &= \mathbf{e}_Z \bullet \boldsymbol\omega = -\frac{R}{r}\omega_0 \end{aligned}$$

(Forts. på nästa sida.)

Hjulet är (approximativt) en plan massfördelning, med

$$I_{AX} = I_{AY} = \tfrac{1}{4}mr^2,\ I_{AZ} = \tfrac{1}{2}mr^2.$$

Enligt Eulers ekvationer är då

$$\Sigma M_{AX} = \tfrac{1}{4}mr^2\,\dot{\omega}_X + \tfrac{1}{4}mr^2\omega_Y\omega_Z = \tfrac{1}{4}mr^2\left(-\frac{R}{r}\omega_0^2\,\cos\!\left(\frac{R}{r}\omega_0 t\right) - \frac{R}{r}\omega_0^2\,\cos\!\left(\frac{R}{r}\omega_0 t\right)\right)$$

$$\Sigma M_{AY} = \tfrac{1}{4}mr^2\,\dot{\omega}_Y - \tfrac{1}{4}mr^2\omega_Z\omega_X = \tfrac{1}{4}mr^2\left(-\frac{R}{r}\omega_0^2\,\sin\!\left(\frac{R}{r}\omega_0 t\right) - \frac{R}{r}\omega_0^2\,\sin\!\left(\frac{R}{r}\omega_0 t\right)\right)$$

$$\Sigma M_{AZ} = \tfrac{1}{4}mr^2\,\dot{\omega}_Z = 0$$

så vi får svaret

Svar c):

$$\Sigma M_{AX} = -\tfrac{1}{2}mRr\omega_0^2\,\cos\!\left(\frac{R}{r}\omega_0 t\right)$$

$$\Sigma M_{AY} = -\tfrac{1}{2}mRr\omega_0^2\,\sin\!\left(\frac{R}{r}\omega_0 t\right)$$

$$\Sigma M_{AZ} = 0$$

■