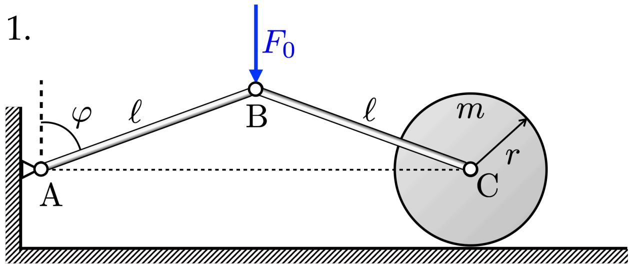
Lösningsskisser till tentamen MMS215 2021-10-27

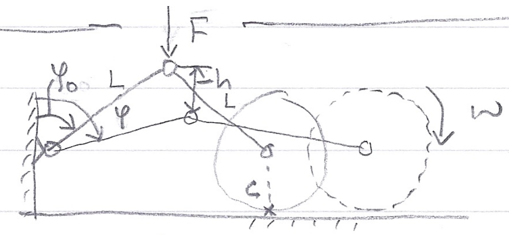
1.



En homogen cirkulär cylinder med massan m och radien r kan rulla utan glidning på ett horisontellt golv. Cylinderns rörelse bestäms av två sammanlänkade lätta stänger AB och BC, vardera av längden ℓ. Lederna i A, B och C är friktionsfria.

Vid $t = 0$ startar systemet från vila i ett läge då $\varphi = \varphi_0$, genom att en konstant vertikal kraft av storleken F_0 appliceras i B som figuren visar.

Bestäm cylinderns vinkelhastighet som funktion av vinkeln φ. (10p)



Systemet i vila vid $\varphi = \varphi_0$

Energilag $W = \Delta T$ (1)

där $W = F \cdot h$ $\Rightarrow$

$$W = F \cdot L(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$$

$T_{start} = 0$, $T_{slut} = \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{3}{4} m r^2 \omega^2$ in i (1)

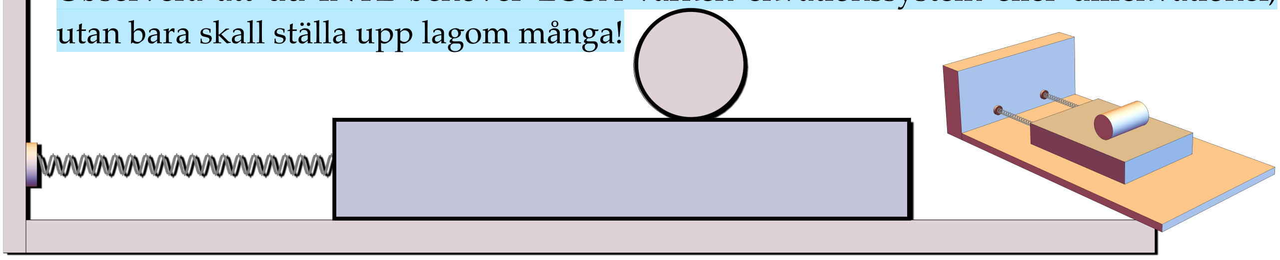
$$F \cdot L(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) = \frac{3}{4} m r^2 \omega^2$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{FL(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}{3m}}$$

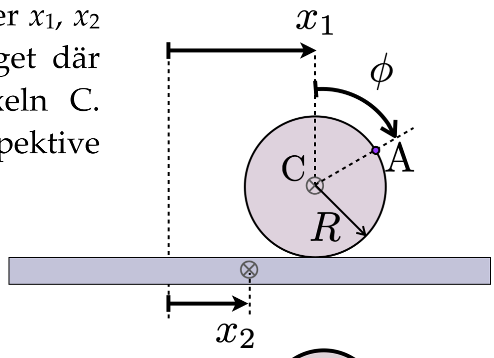
$$I_C = \frac{1}{2} m r^2 + m r^2 = \frac{3}{2} m r^2$$

2. En plan homogen skiva av massan $3m$ kan glida friktionsfritt på ett horisontellt golv. Skivan är medelst två horisontella linjära fjädrar fäst i en orubblig vägg som figuren antyder. Fjäder-konstanten för var och en av fjädrarna är k. En homogen cirkulär cylinder av massan m och radien R kan rulla *utan glidning* på skivan. Skivan och cylindern är i vila i jämviktsläget när skivan ges en liten impuls åt höger i figuren. Ställ upp lagom många ekvationer (utöver begynnelsevillkoren) för att rörelsen hos skivan och cylindern därefter skall kunna bestämmas. (10p)

   Observera att du INTE behöver LÖSA varken ekvationssystem eller diffekvationer, utan bara skall ställa upp lagom många!



Frilägg cylinder och skiva var för sig. Inför koordinater x_1, x_2 och ϕ enligt figuren. (De är alla noll i jämviktsläget där fjädern är ospänd.) Kalla en punkt på cylinderaxeln C. Frilägg och ställ upp rörelseekvationerna för respektive kropp. Tre av dessa ekvationer är



$$\text{och}\quad \begin{cases} \rightarrow: & m\ddot{x}_1 = -H & (1) \\ \overset{\frown}{\mathrm{C}}: & \bar{I}_{\mathrm{C}}\ddot{\phi} = HR & (2) \\ \rightarrow: & 3m\ddot{x}_2 = H - 2kx_2 & (3) \end{cases}$$

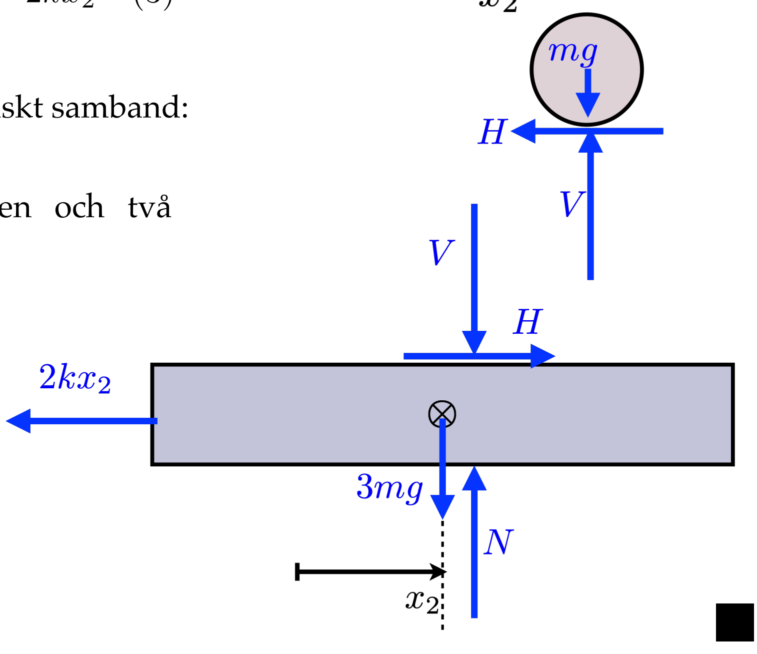
där $$\bar{I}_{\mathrm{C}} = \tfrac{1}{2}mR^2$$

Vi har också ett användbart kinematiskt samband:

$$x_1 = x_2 + R\phi \quad (4)$$

som förstås kan deriveras både en och två gånger.

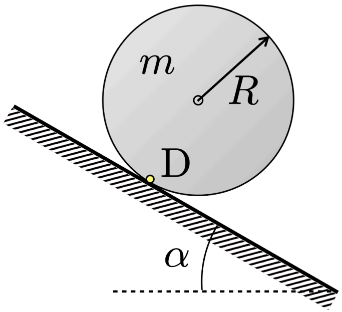
Svar: De fyra ekv. (1), (2), (3) och (4) räcker (tillsammans med begynnelsevillkoren) för att bestämma de fyra obekanta $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\phi(t)$ och $H(t)$.



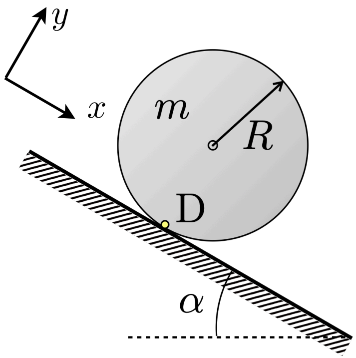
∎

3. En homogen cirkulär cylinder av massa m och radien R kan rulla utan glidning utför ett slutande plan med lutningsvinkel α relativt ett horisontalplan. Cylindern släpps från vila.

Bestäm hastighetsvektorn (**3p**) och accelerationsvektorn (**7p**) för den kroppsfixa punkten D på cylinderns periferi, markerad i figuren, i det ögonblick cylindern har rullat precis ett varv.



Hastighetsvektorn = **0** (nollvektorn) eftersom cylindern rullar utan glidning.



Inför koordinatriktningar enligt figuren till vänster. Rörelsekevationerna för cylindern är

$$\begin{cases} \searrow: & -F + mg\sin\alpha = m\ddot{x} & (1) \\ \nearrow: & N - mg\cos\alpha = m\cdot 0 & (2) \\ \overset{\curvearrowright}{\text{MC}}: & F\cdot R = (\tfrac{1}{2}mR^2)\cdot\frac{\ddot{x}}{R} & (3) \end{cases}$$

Ur ekvationerna (1) och (3) får vi $\ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$.

Alltså är vinkelaccelerationen för cylindern $\dot{\omega} = \dfrac{2g\sin\alpha}{3R}$, och således är

$$\omega(t) = \frac{2g\sin\alpha}{3R}\cdot t$$
$$\varphi(t) = \frac{g\sin\alpha}{3R}\cdot t^2$$

där ω är cylindernas vinkelhastighet och φ den vinkel den roterat sedan den släpptes från vila vid $t = 0$. Om tiden det tar för den att rulla ett varv från vila är $t_{2\pi}$, så har vi

$$2\pi = \varphi(t_{2\pi}) = \frac{g\sin\alpha}{3R}\cdot t_{2\pi}^2 \quad\Rightarrow\quad t_{2\pi} = \sqrt{\frac{6\pi R}{g\sin\alpha}}$$

Då cylindern rullat ett varv är alltså

$$\boldsymbol{\omega}(t_{2\pi}) = -\mathbf{e}_z\sqrt{\frac{8\pi g\sin\alpha}{3R}}$$
$$\dot{\boldsymbol{\omega}}(t_{2\pi}) = -\mathbf{e}_z\frac{2g\sin\alpha}{3R}$$

Nu kan vi räkna fram den sökta $\boldsymbol{a}_{\mathrm{D}}$ mha formeln $\boldsymbol{a}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{A}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{\mathrm{AB}})$.

Låt A vara cylinderns MC, och B punkten D.

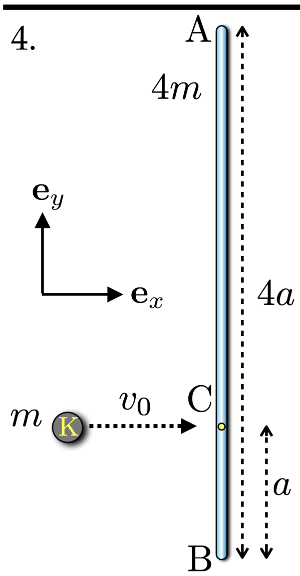
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{D}} = \overline{\boldsymbol{a}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\overrightarrow{\mathrm{MC\,D}} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{\mathrm{MC\,D}}) = \ldots = \left(0, \frac{8}{3}\pi g\sin\alpha, 0\right)$$

Svar:

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}} = \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{a}_{\mathrm{D}} = \left(0, \frac{8}{3}\pi g\sin\alpha, 0\right)$$

■

4.



En liten kropp K med massan m glider friktionsfritt på ett horisontalplan, med en hastighet av storleken v_0, riktad så som anges i figuren,. Den kolliderar med en smal homogen stång AB, med massan $4m$ och längden $4a$, i en (excentrisk) stöt i punkten C angiven i figuren. Kontakten mellan K och AB antas friktionsfri, och stötkoefficienten dem emellan är e.

Ställ upp lagom många skalära ekvationer för att kunna bestämma stångens vinkelhastighet efter kollisionen. (10p)

Observera att du INTE behöver LÖSA ekvationsystemet.

[Ledning: Inget yttre moment på systemet (K + AB) m.a.p. hela systemets masscentrum under stöten.]

Använd ′ för att beteckna storheter omedelbart innan kollisionen, och ″ för dito omedelbart efter. Vi har normal- och tangentriktningarna $\mathbf{e}_\mathrm{n} = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_\mathrm{t} = \mathbf{e}_y$. Innan kollisionen gäller

$$\begin{cases} v'_{\mathrm{K,n}} = v_0 \\ v'_{\mathrm{K,t}} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{v}'_{\mathrm{AB,n}} = 0 \\ \overline{v}'_{\mathrm{AB,t}} = 0 \end{cases}$$

Uttryck hastigheten i C omedelbart efter kollisionen i termer av hastigheten för stångens masscentrum och stångens rotationshastighet omedelbart efter kollisionen:

$$\boldsymbol{v}''_\mathrm{C} = \overline{\boldsymbol{v}}''_\mathrm{AB} + \boldsymbol{\omega}''_\mathrm{AB} \times (-a\,\mathbf{e}_y) \quad \Rightarrow \begin{cases} v''_{\mathrm{C,n}} = \overline{v}''_{\mathrm{AB,n}} + \omega''_\mathrm{AB}\, a \quad (*) \\ v''_{\mathrm{C,t}} = \overline{v}''_{\mathrm{AB,t}} \end{cases}$$

Friktionsfri kontakt mellan K och AB ger att $v''_{\mathrm{K,t}} = v'_{\mathrm{K,t}}$, $\overline{v}''_{\mathrm{AB,t}} = \overline{v}'_{\mathrm{AB,t}}$. Alltså:

$$\begin{cases} v''_{\mathrm{K,t}} = 0 \\ \overline{v}''_{\mathrm{AB,t}} = 0 \end{cases}$$

Rörelsemängden för hela systemet bevaras, och i x-led innebär det att

$$m\, v''_{\mathrm{K,n}} + 4m\, \overline{v}''_{\mathrm{AB,n}} = m\, v_0 \qquad (1)$$

Rörelsemängdsmomentet m.a.p. hela systemets masscentrum, beläget i $(0, -a/5)$ bevaras också, så

$$m\, v''_{\mathrm{K,n}} \frac{4a}{5} + \underbrace{\left(\frac{1}{12} 4m(4a)^2 + 4m\left(\frac{a}{5}\right)^2\right)}_{\text{(F.S. och Steiner!)}} \omega''_\mathrm{AB} = m\, v_0 \frac{4a}{5} \qquad (2)$$

Stötlagen säger att

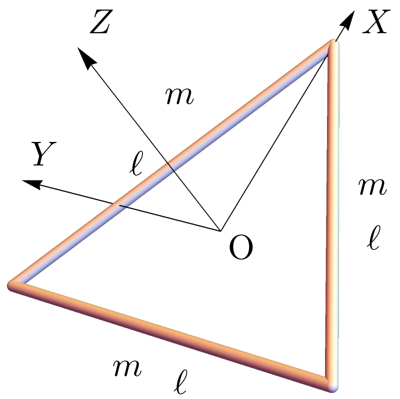
$$e = \frac{v''_{\mathrm{C,n}} - v''_{\mathrm{K,n}}}{v_0 - 0} = \frac{\overline{v}''_{\mathrm{AB,n}} + \omega''_\mathrm{AB}\, a - v''_{\mathrm{K,n}}}{v_0} \qquad (3)$$

där vi använt (*).

Svar: Ekv. (1), (2) och (3) är lagom många ekvationer för att lösa ut ω''_AB (och $\overline{v}''_{\mathrm{AB,n}}$, $v''_{\mathrm{K,n}}$, men dessa två senare efterfrågas ej).

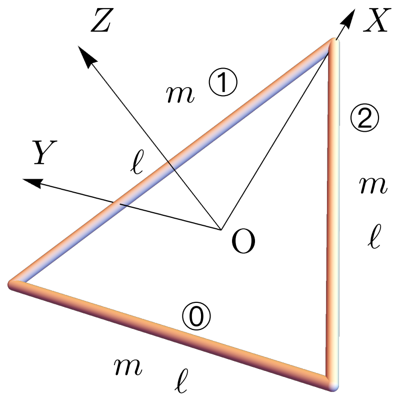
■

5.



Tre smala balkar, vardera med massan m och längden ℓ, har sammansvetsats till en triangel enligt figuren. Tre axlar är givna i figuren, med origo O i triangelns tyngdpunkt. Undersök, för var och en av de kroppsfixa X-, Y- respektive Z-axlarna, om kroppens fria rotation kring resp. axel är stabil eller ej. (10p)

Ledning: Kolla först om $OXYZ$ är ett huvudtröghetssystem, och bestäm tröghetsmomenten kring de tre axlarna.



Vi behöver kolla om $OXYZ$ är ett huvudtröghetssystem (så att vi kan använda Eulers ekvationer).
Eftersom Z = 0 i kroppen får vid direkt att I_{XZ} och I_{YZ} är = 0. Spegelsymmetrin hos kroppen m.a.p. XZ-planet ger sedan att även $I_{XY} = 0$. Eftersom alla deviationsmomenten alltså är noll, är tröghetsmatrisen diagonal, och systemet $OXYZ$ är ett huvudtröghetssystem.
Kroppen är plan (ligger helt i XY-planet), så $I_Z = I_X + I_Y$. Numrera balkarna ⓪, ①, ② som i figuren till höger. Trefaldiga rotationssymmetrin kring Z-axeln ger oss

$$I_Z^{⓪} = I_Z^{①} = I_Z^{②}$$

Formelsamlingen tillsammans med Steiners sats ger

$$I_Z^{⓪} = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\left(\frac{1}{3}\ell \sin 60^\circ\right)^2 = \frac{1}{6} m\ell^2$$

så

$$I_Z = 3 \cdot \frac{1}{6} m\ell^2 = \frac{1}{2} m\ell^2$$

Spegelsymmetrin i XZ-planet ger vidare att $I_X^{①} = I_X^{②}$, och formelsamlingen ger oss

$$I_X^{⓪} = \frac{1}{12} m\ell^2$$

Eftersom endast avståndet till X-axeln för respektive masselement spelar roll i integralen

$$I_X^{①} = \int_{①} (Y^2 + Z^2)\, \mathrm{d}m = \int_{①} Y^2\, \mathrm{d}m$$

så kan vi få $I_X^{①}$ ur formelsamlingen som

$$I_X^{①} = \frac{1}{3} m \left(\frac{1}{2}\ell\right)^2 = \frac{1}{12} m\ell^2$$

Alltså är

$$I_X = \frac{1}{12} m\ell^2 + 2 \cdot \frac{1}{12} m\ell^2 = \frac{1}{4} m\ell^2$$

och därmed

$$I_Y = I_Z - I_X = \frac{1}{2} m\ell^2 - \frac{1}{4} m\ell^2 = \frac{1}{4} m\ell^2 = I_X$$

Vi har alltså ett fall där $I_X = I_Y$ och $I_Z = I_X + I_Y$. Precis som i (t.ex.) A17 kan du nu m.h.a. Eulers ekvationer visa att rotation kring var och en av axlarna X, Y och Z är stabil. ■