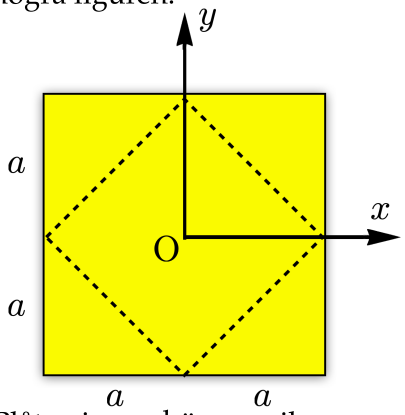
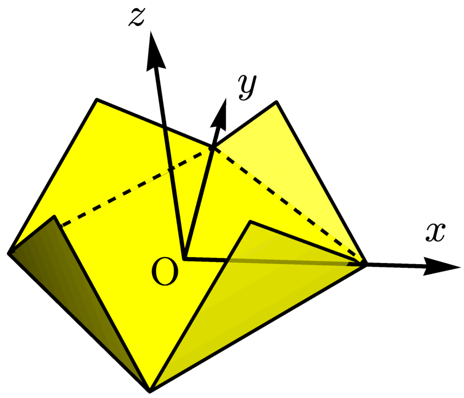
1. De fyra hörnen av en tunn homogen och kvadratisk plåt med sidan $2a$ viks upp så att de bildar fyra trianglar vinkelräta mot xy-planet som plåten ursprungligen låg i. Bestäm masscentrums koordinater för den vikta plåten i det koordinatsystem $Oxyz$ som visas i den högra figuren. (10p)



Plåten innan hörnen viks upp.



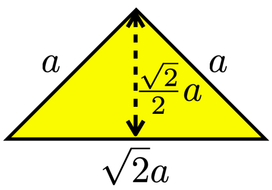
Plåten efter vikning.

Vi kan här räkna på areorna i st f massorna. Av symmetriskäl (spegelsymmetri i yz- resp i xz-planet) är

$$\bar{x} = 0 = \bar{y}$$

De uppvikta hörnen har vart och ett arean

$$A_{\triangle} = \tfrac{1}{2}a^2$$



och deras masscentra har alla z-koordinaten

$$\bar{z}_{\triangle} = \tfrac{1}{3}\tfrac{\sqrt{2}}{2}a$$

eftersom en triangels masscentrum enligt formelsamlingen ligger på en tredjedel av triangelns höjd.

Den del av plåten som ligger kvar i xy-planet (så att dess masscentrum har $\bar{z}_{\square} = 0$) är kvadratisk med arean

$$A_{\square} = (\sqrt{2}a)^2 = 2a^2$$

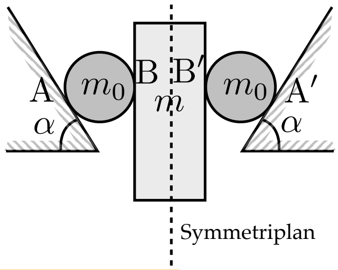
Vi har då enligt formeln för masscentrums läge för en sammansatt kropp:

$$\bar{z} = \frac{A_{\square}\cdot\bar{z}_{\square} + 4A_{\triangle}\cdot\bar{z}_{\triangle}}{A_{\square} + 4A_{\triangle}} = \frac{4\frac{1}{2}a^2\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}a}{4a^2} = \frac{\sqrt{2}}{12}a$$

Svar: $\begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{y} = 0 \\ \bar{z} = \frac{\sqrt{2}}{12}a \end{cases}$ ■

x och y rätt: **2p + 2p**
z fel men någorlunda vettig ansats: **2p eller 3p**
z rätt: **6p**

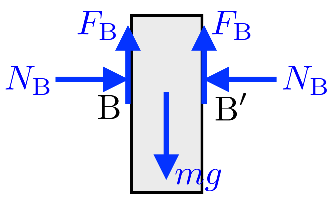
2. Ett strävt homogent rätblock av massan m hålls i jämvikt, i det läge som figuren visar, med hjälp av två sträva homogena cirkulära cylindrar vardera av massan m_0. Friktionskoefficienten mellan rätblocket och cylindrarna i kontaktpunkterna B och B′ är μ. Friktionskoefficienten mellan cylindrarna och de två sträva sluttande planen i punkterna A och A′ är också μ. Planen bildar, som figuren visar, vinkeln α mot ett horisontalplan.



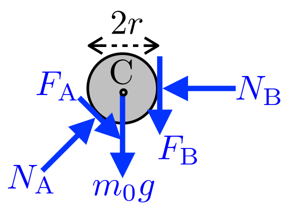
Vi vill kunna bestämma hur stor m högst får vara om jämvikt skall vara möjlig. Du får anta att glidning först sker i punkterna B och B′, och att systemet är helt symmetriskt kring symmetriplanet som skissats i figuren.

Ställ upp lagom många ekvationer för att bestämma hur stor m högst får vara om jämvikt skall vara möjlig! [Du behöver inte LÖSA ekvationssystemet!] (10p)

Frilägg rätblocket respektive den vänstra cylindern. Betrakta gränsen till glidning, som alltså först uppnås i B. Låt oss kalla cylinderns centrum för C, och dess radie för r.



$$\begin{cases} \text{NII} \uparrow: \quad 2F_B - mg = 0 & (1) \\ \text{fullt utv. friktion i B}: \quad F_B = \mu N_B & (2) \end{cases}$$



r divideras bort eftersom den ej är given i uppgiftstexten.

$$\begin{cases} \overset{\curvearrowleft}{\text{C}}: \quad F_A \cancel{r} - F_B \cancel{r} = 0 & (3) \\ \text{NII} \uparrow: \quad N_A \cos\alpha - F_B - F_A \sin\alpha - m_0 g = 0 & (4) \\ \text{NII} \rightarrow: \quad N_A \sin\alpha + F_A \cos\alpha - N_B = 0 & (5) \\ \text{friktionsvillkor i A}: \quad F_A \leq \mu N_A & (6) \end{cases}$$

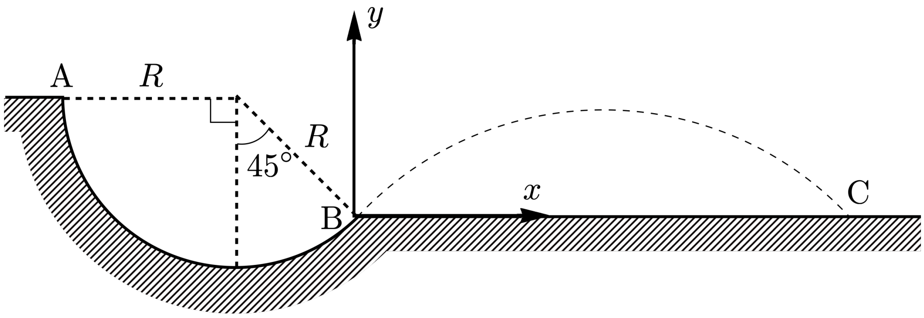
Ekvationerna (1), (2), (3), (4), (5) är lagom många ekvationer för att kunna bestämma de fem obekanta m, F_A, F_B, N_A, N_B, och alltså speciellt för att bestämma den sökta maximala massan m.

Max 2p per ekvation.

Svar: Ekvationerna (1), (2), (3), (4), (5).

Kommentar: Angående olikheten (6), så kan man kontrollera att den är uppfylld när man löst ut F_A och N_A.

3. En pulkaåkare startar från vila i punkten A i figuren. Pulkan glider friktionsfritt i den cirkelformade backen ända till punkten B där pulkan med åkare övergår till en kaströrelse, och sedermera landar i punkten C.



Bestäm storlek (6p) och riktning (4p) av ekipagets hastighetsvektor ögonblicket innan landningen.

Energilagen för rörelsen från A till B ger på vanligt vis

$$mg(-R\cos 45^\circ - 0) + \tfrac{1}{2}m(v_B^2 - 0^2) = 0 \quad \Rightarrow v_B = \sqrt{2\tfrac{1}{\sqrt{2}}gR} = \sqrt{\sqrt{2}\,gR}$$

Energilagen för rörelsen från B till C ger (eftersom B och C är på samma höjd)

$$v_C = v_B = \sqrt{\sqrt{2}\,gR}$$

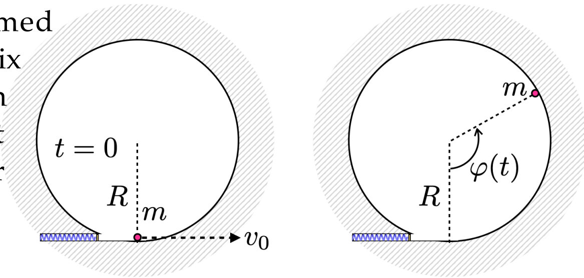
Elevationsvinkeln för starten av kaströrelsen i B är (se figuren!) 45°. Kastparabeln är symmetrisk kring sin maxpunkt, så banan lutar lika mycket i C, men med rörelseriktningen nedåt.

Svar: a) $v_C = \sqrt{\sqrt{2}\,gR}$

b) 45° nedåt åt höger i figuren.

■

4. En partikel med massan m skjuts iväg med begynnelsehastigheten v_0 längs insidan av en fix cylinder med radien R. Partikeln avfyras från cylinderytans lägsta punkt, och rör sig i ett vertikalplan. Mellan partikeln och väggen råder kinetisk friktion med friktionskoefficienten μ.



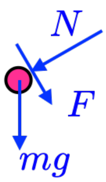
Bestäm

a) en ordinär differentialekvation för vinkeln $\varphi(t)$ angiven i den högra figuren (6p)

b) ett villkor (på φ och dess derivator) för att partikeln inte ännu skall ha tappat kontakten med cylinderväggen. (4p)

[Svaren i a) och b) får innehålla parametrarna R, μ, och tyngdkraftaccelerationen g (men inga andra parametrar).]

Frilägg partikeln och ställ upp Newtons andra lag för partikeln. Använd naturliga riktningar:



$$\begin{cases} \text{NII} \swarrow \text{n}: & N - mg\cos\varphi = mR\dot{\varphi}^2 \quad (1) \\ \text{NII} \nwarrow \text{t}: & -F - mg\sin\varphi = mR\ddot{\varphi} \quad (2) \\ \text{Kinetiskt friktionsvillkor}: & F = \mu N \quad (3) \end{cases}$$

Lös ut N ur ekvation (1): $N = mR\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi$

Använd sedan friktionsvillkoret (3) i ekvation (2) (med detta N):

$$-\mu(mR\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi) - mg\sin\varphi = mR\ddot{\varphi}$$

Dividera alla termer med mR och snygga upp litet:

$$\ddot{\varphi} + \mu\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R}(\mu\cos\varphi + \sin\varphi) = 0$$

vilket alltså är svaret på a).

Villkoret vi söker i b) fås av att normalkraften måste vara positiv för att partikeln skall vara i kontakt med cylinderns inre yta, vilket kan uttryckas (se uttrycket för N härlett ur (1) ovan!):

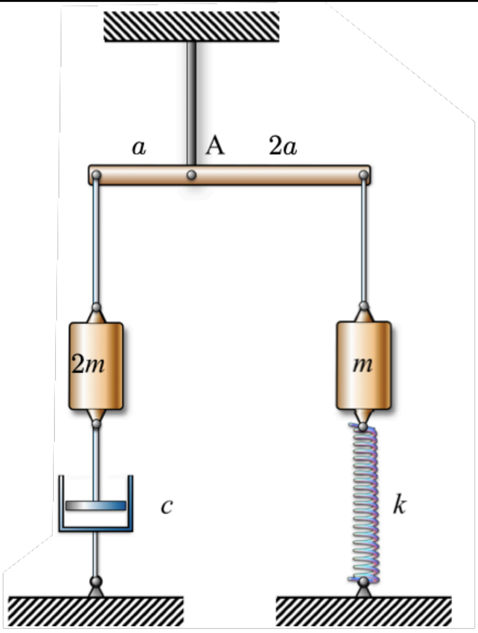
$$\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R}\cos\varphi > 0$$

Svar: a) $\ddot{\varphi} + \mu\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R}(\mu\cos\varphi + \sin\varphi) = 0$

b) $\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R}\cos\varphi > 0$

■

5. En initialt horisontell, ”masslös” stel stång av längden $3a$ kan rotera friktionsfritt kring en fix punkt A; se figuren! Punkten A är placerad på avståndet a från stångens ena ände. Två kroppar, den ena av massan $2m$, den andra av massan m, hänger från stången medelst lätta stela stänger. Den tyngre kroppen är fäst i en dämpare (dämpkonstant c), medan den lättare är fäst i en fjäder (fjäderkonstant k) som figuren antyder. I det läge som visas i figuren är fjädern ospänd.



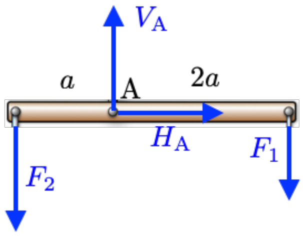
Bestäm den naturliga vinkelfrekvensen för detta system vid små svängningar. (10p)

Här avses den odämpade vinkelfrekvensen.

Låt $x(t)$ vara förskjutningen av den högra kroppen uppåt från jämviktsläget, och låt $y(t)$ vara den vänstra kroppens förskjutning nedåt från jämviktsläget. Då inses lätt att vi har ett kinematiskt villkor för små utslag:

$$x(t) = 2\,y(t) \;\Rightarrow\; \dot{x}(t) = 2\,\dot{y}(t) \;\Rightarrow\; \ddot{x}(t) = 2\,\ddot{y}(t) \qquad (1,2,3)$$

Frilägg den masslösa stången. Eftersom den är ett ”masslöst element” får vi en ekvation som ”ser ut som” en momentjämviktsekvation kring A:



$$\overset{\frown}{\mathrm{A}}:\quad F_2 \cdot a - F_1 \cdot 2a = 0 \;\Rightarrow\; F_2 = 2F_1 \qquad (4)$$

Pga ”masslösheten”!

Frilägg sedan de båda kropparna och ställ upp NII för var och en av dem:

Vänstra kroppen $\downarrow$: $$-F_2 + 2mg - c \cdot \dot{y} = 2m\,\ddot{y} \qquad (5)$$

Högra kroppen $\uparrow$: $$F_1 - kx - mg = m\,\ddot{x} \qquad (6)$$

Multiplicera de båda leden i ekvation (6) med 2 och addera ledvis till ekvation (5):

$$\underbrace{(2F_1 - F_2)}_{=0} + \underbrace{(2mg - 2mg)}_{=0} - c \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2}\dot{x}}_{=\dot{y}} - 2kx = 2m \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2}\ddot{x}}_{=\ddot{y}} + 2m\ddot{x}$$

Enl. ekv. (4) Enl. ekv. (2) Enl. ekv. (3)

Hyfsas till: $\ddot{x} + \frac{c}{6m}\,\dot{x} + \frac{2k}{3m}x = 0$, så genom jämförelse med standardformen av svängnings-ekvationen får vi

$$\omega^2 = \frac{2k}{3m}$$

Stången ej masslös: Helfel!

Svar: $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{3m}}$

Alternativ lösning: Ställ upp lagen för rörelsemängdsmomentet för systemet stång+ båda massorna.