

Tillämpad matematisk statistik LMA521

Tentamen 2022-01-11

Tid: 8.30-12.30.

Hjälpmedel: Kursboken *Matematisk statistik - med övningar* (eller gamla kursboken *Matematisk statistik*). Chalmersgodkänd räknare. Formelsamlingen (bifogas även tesen).

Kursansvarig: Kirsti Biggs. **Examinator:** Johan Tykesson tel. 0703182096.

Rond: Johan Tykesson. Kommer till salen ca 9.30 och 11.30.

Betygsgränser: För betyg 3, 4 resp. 5 krävs minst 20, 30 resp. 40 poäng.

Redovisa lösningarna i detalj. Räkna exakt så långt som möjligt. Svaret kan ges numeriskt/approximativt.

OBS: Uppgiftstext på flera sidor.

1. (2+2 poäng) Annika spelar ett bordsspel och kastar två symmetriska 20-sidiga tärningar (numrerade från 1 till 20). Tärningarna antas oberoende. Låt A vara händelsen att hon får mer än eller lika med 16 på den första tärningen, och B att hon får mer än eller lika med 16 på den andra tärningen. Beräkna

- (a) $P(A \cup B)$,
- (b) $P(A \cap B \mid A \cup B)$.

2. (2+4 poäng)

- (a) I en urna finns två gröna och åtta röda bollar. Man drar slumpmässigt tre bollar från urnan (utan återläggning). Vad är sannolikheten att man får exakt en grön boll?
- (b) I en stor låda finns 200 gröna och 800 röda bollar. Man drar slumpmässigt 15 bollar från lådan (utan återläggning). Vad är sannolikheten att man får högst två gröna bollar?

Lämpliga approximationer kan användas.

3. (1+2+3 poäng) Man har gjort 10 oberoende mätningar av en normalfördelad stokastisk variabel med okänt väntevärde μ och okänd standardavvikelse σ . Från stickprovet har man beräknat följande summer:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 332 \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 11098.$$

- (a) Beräkna stickprovsmedelvärdet \bar{x} och stickprovsstandardavvikelsen s .
Om du ej löst deluppgift a, sätt in egna rimliga värden i deluppgifter b och c.
- (b) Beräkna ett tvåsidigt symmetriskt 99%:s konfidensintervall för μ .
- (c) Beräkna ett ensidigt uppåt begränsat 99%:s konfidensintervall för σ .

4. (2+2+3 poäng) Antalet jordbävningar i ett visst område under ett år kan antas följa en Poissonprocess med parameter $\lambda = 0.5$. Det innebär bland annat att antalet jordbävningar under ett år är Poissonfördelat med parameter $\lambda = 0.5$, och att antalet jordbävningar under olika år är oberoende. Dessutom innebär det att vid en given tidpunkt är tiden till nästa jordbävning exponentialfördelad med väntevärde 2 år, och tiderna mellan jordbävningarna är oberoende exponentialfördelade stokastiska variabler med väntevärde 2 år.
- Beräkna sannolikheten att högst två jordbävningar inträffar i området under ett givet år.
 - Om en jordbävning inträffar idag, vad är sannolikheten att väntetiden till nästa jordbävning blir kortare än sex månader?
 - Forskare vill studera jordbävningarna i området under lång tid. Beräkna approximativt sannolikheten att nästa 50 jordbävningar inträffar inom 70 år.
5. (1+2+3 poäng)
- Hur många "ord" kan bildas från bokstäverna i ordet KANSAS? (Alla sex bokstäverna skall användas i ett "ord".)
 - Man väljer slumpmässigt ett "ord" från a-uppgiften. Vad är sannolikheten att de två A:na står intill varandra?
 - Man väljer slumpmässigt ett "ord" från a-uppgiften. Vad är den betingade sannolikheten att de två A:na står intill varandra givet att "ordet" börjar med K?
6. (2 + 3 +3 poäng) Medlemmarna i motorsportsklubben Mycket Fart brukar ofta ställa upp i dragracing. På grund av många förluster i rad vill de nu undersöka vilka faktorer som påverkar tiden det tar tills de kommer in i mål. De faktorer som de finner intressanta att undersöka är:

	<i>faktor</i>	-	+
<i>A</i>	<i>längd på bilen</i>	<i>3m</i>	<i>5m</i>
<i>B</i>	<i>tjocklek på hjulen</i>	<i>0.5dm</i>	<i>1dm</i>
<i>C</i>	<i>målade flammor på bilen</i>	<i>nej</i>	<i>ja</i>

För att undersöka hur mycket varje faktor påverkar har man utgått från ett fullständigt faktorförsök och mät upp körtiden enligt följande tabell:

<i>Nr.</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>y</i>
1	-	-	-	14.01
2	+	-	-	12.27
3	-	+	-	14.56
4	+	+	-	8.24
5	-	-	+	12.18
6	+	-	+	14.42
7	-	+	+	12.7
8	+	+	+	10.25

- Skatta huvudeffekten l_A och samspelseffekten l_{AC} .

- (b) Skattar man övriga effekter får man $l_B = -1.78$, $l_C = -0.12$, $l_{AB} = -1.78$, $l_{BC} = -0.04$, $l_{ABC} = -0.03$. Dessutom blir medelvärdet av de åtta mätningarna $l_M = 12.33$. Man vet att mätfelen vid mätningarna är normalfördelade med standardavvikelse 0.21, vilket gör att ett 95% referensintervall ges av $[-0.29, 0.29]$. Med hjälp av detta, bestäm vilka effekter som är signifikanta. Ange sedan en lämplig matematisk modell för körtiden baserat på de signifikanta effekterna.
- (c) Efter att man har gjort mätningarna kom man på att resultatet kan ha påverkats av att man använde två olika förare, person 1 och person 2. Person 2 körde de korta bilarna utan flammor samt de långa bilarna med flammor. Person 1 körde de övriga. Vi har alltså ytterligare en faktor $D = \text{bilförare}$. Vi har alltså egentligen gjort ett reducerat faktorförsök. Antag vi säger att nivå + för D svarar mot att person 2 kör och nivå - svarar mot att person 1 kör. Vad är generatoren, och vad blir alias till A , B och C ?
7. (6 poäng) En företagare köper och säljer klarinetter. Då hen är ny på marknaden och anser att ett gott omdöme är av yttersta vikt använder hen sig av en dubbel provplan för att avgöra om ett parti är bra nog. Av ett parti på 100 klarinetter plockar hen först ut 4 stycken och provspelar dessa. Om inga av dessa är defekta accepteras partiet. Är 3 eller fler dåliga avvisar hen partiet. Annars går hen vidare till urval 2. I urval 2 kontrollerar företagaren ytterligare 4 klarinetter. Om totala antalet defekta i urval 1 och urval 2 är större än eller lika med 3 avvisas partiet. Annars godkänns det. Om partiet blir avvisat kontrolleras hela partiet. Antag 15 defekta klarinetter i partiet, dvs felkvot 0.15. Beräkna sannolikheten att partiet accepteras, och beräkna väntevärdet av antalet klarinetter företagaren måste kontrollera (dvs ATI). Motivera eventuella approximationer du gör.
8. (3+2+2 poäng) En glasstillverkare måste regelbundet se till så att mängden socker i glassen inte får oväntade förändringar under tillverkningsprocessen. Därför tar hen regelbundet ut 10 burkar med glass och mäter mängden socker per 100 ml i dessa. Resultatet för 10 mät-tillfällen syns i tabellen nedan, där \bar{x} står för provgruppsmedelvärde och s står för provgrupps-standardavvikelse.

tillfälle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\bar{x}	22.28	22.78	26.53	20.55	23.35	18.62	21.22	21.71	15.83	26.29
s	2.89	2.11	2.51	4.8	4.91	4.86	5.14	7.6	6.26	7.38

- (a) Ta fram styrgränser (kontrollgränser) för lämpliga diagram och avgör om processen är under statistisk kontroll. Du behöver ej rita diagrammen.
- (b) Senast glasstillverkaren räknade ut sina styrdiagram beräknade hen också ut kapabilitetsindex till $C_p = 2$. Dock har hen glömt bort vilka kravgränser som hen utgick ifrån. Hjälp glasstillverkaren att ta reda på bredden på styrgränsvärdet, dvs bestäm $T_{\bar{\sigma}} - T_u$. Kom ihåg att vi kan skatta standardavvikelsen som $\sigma = \frac{\bar{s}}{c_4}$ där $c_4 = 0.9727$ då $n = 10$.
- (c) Hen får också reda på att det korrigerade kapabilitetsindex blev $C_{pk} = 1.7$. Ta fram värden på $T_{\bar{\sigma}}$ och T_u som uppfyller detta. Vid lösandet får du skatta väntevärdet μ på lämpligt vis med hjälp av mätvärdena ovan. Vi antar också att processens målvärde ligger precis i mitten av intervallet mellan T_u och $T_{\bar{\sigma}}$.