Lösningsförslag 2020-05-02

1.1

a) $\alpha = 0{,}05$. Antal frihetsgrader $= n-1$

där $n =$ antalet bokstäver i ditt förnamn

Intervallet ges av $\bar{x} \pm t_{0{,}025}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$

$= 85 \pm \underbrace{t_{0{,}025}(n-1)}_{} \cdot \frac{4}{\sqrt{n}}$ där

rad $n-1$, kolumn 0,05 i en t-tabell

b) Intervallet ges av $\left[0, \sqrt{\frac{(n-1)\,16}{\chi^2_{0{,}95}}}\right]$

där $\chi^2_{0{,}95}$ står på rad $n-1$, kolumn 0,95 i χ^2-tabellen

2.

a) $f(x) \geq 0$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}(2-x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[2x - x^2/2\right]_0^2 = \frac{1}{2}(4-2) = 1.$

b) $E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 2x - x^2\,dx =$

$= \frac{1}{2}\left[x^2 - x^3/3\right]_0^2 = \frac{1}{2}(4 - 8/3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$

$E(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 2x^2 - x^3\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{64-48}{12}\right)$

$= \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow V(\xi) = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{2}{9}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}}$

c) Låt ξ_i = livslängden för penna nr i.

Summan av livslängderna $= T = \sum_{i=1}^{500} \xi_i$.

Enligt CGS är T approx $N\left(500\cdot\frac{2}{3}, \sqrt{500}\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

$= N\left(\frac{1000}{3}, \frac{\sqrt{1000}}{3}\right)$

$P(T > 350) = 1 - P(T \leq 350) =$

$= 1 - P\left(\frac{T - \frac{1000}{3}}{\sqrt{1000}/3} \leq \frac{\left(350 - \frac{1000}{3}\right)}{\sqrt{1000}/3}\right)$

$\approx 1 - \Phi(1{,}58) \approx 1 - 0{,}9429 = \boxed{0{,}0571}$

2 d) $P(\xi \geq 1,5) = \int_{1,5}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{1,5}^{2} \frac{1}{2}(2-x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[2x - x^2/2\right]_{3/2}^{2} = \frac{1}{2}\left(4 - 2 - \left(3 - \frac{9}{8}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{8} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right) = \boxed{\frac{1}{16}} = \boxed{0,0625}$

e) Låt η = antalet pennor som funkar efter 1,5 månader. Då är $\eta \sim Bin(n = 1000,\ p = 0,0625)$

Eftersom $np(1-p) = 58,59 > 10$ så är

η approx $N(np, \sqrt{np(1-p)})$

$= N(62,5,\ 7,65)$.

Så $P(\eta \leq 65) = P\left(\frac{\eta - 62,5}{7,65} \leq \frac{65 - 62,5}{7,65}\right)$

$\approx \Phi(0,33) \approx \boxed{0,63}$

---

3. a) Multiplikationsprincipen $\Rightarrow$

antalet reg nr $= 24^4 \cdot 10^4 = \boxed{3317760000}$

b) Antal skyltar på sökta formatet är

$\underbrace{\binom{24}{2}}_{\text{antal par av två bokstäver}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{antal sätt välja 2 positioner av 4}} \cdot 10^4 = \frac{24 \cdot 23}{2} \cdot 6 \cdot 10^4 = 16560000$

Så sökt sannolikhet $= \frac{16560000}{3317760000} \approx \boxed{0,005}$

4) a)

$$P(\xi > 1) = 1 - P(\xi \leq 1) = 1 - F(1)$$
$$= 1 - (1 - e^{-c}) = \boxed{e^{-c}}$$

b)

$$P(\xi < 2 \mid \xi \geq 1) = \frac{P(\{\xi < 2\} \cap \{\xi \geq 1\})}{P(\xi \geq 1)}$$
$$= \frac{P(1 \leq \xi < 2)}{P(\xi \geq 1)} \underset{\xi \text{ är kontinuerlig}}{=} \frac{F(2) - F(1)}{1 - F(1)} =$$
$$= \frac{(1 - e^{-4c}) - (1 - e^{-c})}{1 - (1 - e^{-c})} = \frac{e^{-c} - e^{-4c}}{e^{-c}}$$
$$= \boxed{1 - e^{-3c}}$$

c)

$$f_\xi(x) = F'(x) = \begin{cases} 2cx\,e^{-cx^2} & \text{om } x \geq 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

5 a)

$$l_C = \frac{327 + 453 + 368 + 482 - 211 - 320 - 292 - 451}{4}$$
$$= \boxed{89}$$
$$l_{AC} = \frac{211 + 292 + 453 + 482 - 320 - 451 - 327 - 368}{4}$$
$$= \boxed{-7}$$

men detta är OK om man kollade på l_{AC} istället

b) En 95 % konfidensintervall ges av

$$0 \pm 1{,}96 \frac{2\sigma}{\sqrt{N}} = 0 \pm 1{,}96 \cdot \frac{2 \cdot 10}{\sqrt{8}} = 0 \pm 13{,}86.$$

Vi ser att l_C signifikant, men inte l_{AC}

I tesen frågades efter om l_A var signifikant, vilket den är

c) I teckentabellen ser vi att $D = AB$ ← generatorn

Ordet blir således $I = ABD$.

6.) Kvoten $\frac{10}{2000}$ är liten så vi kan använda binomialapproximationer vid lösandet.

a) Låt d_1 = antal defekta i urval 1.

d_1 är approx $Bin(n=10, p=0.2)$

$P(\text{acceptera i urval } 1) = P(d_1 \le 3)$

$= P(d_1=0) + P(d_1=1) + P(d_1=2) + P(d_1=3)$

$\approx \binom{10}{0} 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^9 + \binom{10}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^8$

$+ \binom{10}{3} 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^7 \approx 0{,}8791$

Låt d_2 = antal defekta i urval 2. d_2 är approx $Bin(10, 0.2)$

$P(\text{acceptera i urval } 2) = P(d_1=4 \cap d_2=0)$

$+ P(d_1=4 \cap d_2=1) + P(d_1=5 \cap d_2=0)$

$\approx P(d_1=4)P(d_2=0) + P(d_1=4)P(d_2=1) + P(d_1=5)P(d_2=0)$

$= \binom{10}{4} 0{,}2^4\, 0{,}8^6 \binom{10}{0} 0{,}2^0\, 0{,}8^{10}$

$+ \binom{10}{4} 0{,}2^4\, 0{,}8^6 \binom{10}{1} 0{,}2^1\, 0{,}8^9$

$+ \binom{10}{5} 0{,}2^5\, 0{,}8^5 \binom{10}{0} 0{,}2^0\, 0{,}8^{10} \approx 0{,}0359$

$\Rightarrow P(\text{partiet accepteras}) \approx 0{,}8791 + 0{,}0359 \approx \boxed{0{,}915}$

b) $ASN = 10 + 10 \cdot P(\text{man går till urval } 2)$

$= 10 + 10 \cdot (P(d_1=4) + P(d_1=5))$

$= 10\left(1 + \binom{10}{4} 0{,}2^4\, 0{,}8^6 + \binom{10}{5} 0{,}2^5\, 0{,}8^5\right)$

$\approx 10 \cdot 1{,}1145 = \boxed{11{,}145}$

7.)

$\bar{\bar{x}} = 200{,}2$

$\bar{s} = 7{,}3$

$A_3 = 0{,}68$

$B_3 = 0{,}51$

$B_4 = 1{,}49$

Gränser för $\bar{x}$-diagram med s-metoden:

$\bar{\bar{x}} \pm A_3 \bar{s} = 200{,}2 \pm 0{,}68 \cdot 7{,}3 = 200{,}2 \pm 4{,}964$

$= [\, 195{,}236 \;,\; 205{,}164 \,]$

Gränser för s-diagram:

$[\, B_3 \bar{s} \;,\; B_4 \bar{s} \,] = [\, 3{,}723 \;,\; 10{,}877 \,]$

Processen ej i statistisk kontroll ty
gie s-värden ovanför övre gränsen i s-diagrammet

8.1

Låt η = antal gröna bollar som flyttas från urnan A till urna B.

$$P(\eta=0) = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(\eta=1) = \frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$P(\eta=2) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

Låt ξ = antal gröna som dras från urna B i den andra dragningen. Vi behöver $P(\xi=0)$, $P(\xi=1)$ och $P(\xi=2)$

$$P(\xi=0) = P(\xi=0\mid\eta=0)\,P(\eta=0) + P(\xi=0\mid\eta=1)\,P(\eta=1) + P(\xi=0\mid\eta=2)\,P(\eta=2)$$

Vi har att $P(\xi=0\mid\eta=0) = 1$

$$P(\xi=0\mid\eta=1) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

$$P(\xi=0\mid\eta=2) = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Så $P(\xi=0) = 1\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} = \frac{6+12+1}{36} = \frac{19}{36}$$

Vi beräknar $P(\xi=1)$ på liknande sätt:

Vi har $P(\xi=1\mid\eta=0) = 0$

$$P(\xi=1\mid\eta=1) = 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$P(\xi=1\mid\eta=2) = \frac{2}{3}$$

Så $P(\xi=1) = 0\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

Vi får $P(\xi=2) = 1 - P(\xi=0) - P(\xi=1) = 1 - \frac{19}{36} - \frac{4}{9}$

$$= 1 - \frac{19}{36} - \frac{16}{36} = \frac{1}{36}$$

forts →

$$E(\xi) = 0 \cdot P(\xi=0) + 1 \cdot P(\xi=1) + 2 \cdot P(\xi=2)$$

$$= 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{4}{9} + \frac{1}{18}$$

$$= \frac{8+1}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

$$E(\xi^2) = 0^2 \cdot P(\xi=0) + 1^2 \cdot P(\xi=1) + 2^2 \cdot P(\xi=2)$$

$$= 1 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow V(\xi) = \frac{5}{9} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{9} - \frac{1}{4} = \frac{20-9}{36}$$

$$= \frac{11}{36}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = S(\xi) = \sqrt{V(\xi)} = \frac{\sqrt{11}}{6} \approx \boxed{0{,}55}$$