Lösningsförslag till tentamen LMA521 20200114, 08.30-12.30

1. Förväntat antal bilar per hushåll är 0.8 och motsvarande standardavvikelse 0.4.

   (a) Väntevärdet är 0.8.

   (b) Standardavvikelsen är 0.4.

   (c) Stok. var. för antal bilar är $\xi \in \mathrm{N}(900 \cdot 0.8, 30 \cdot 0.4)$. Sannolikheten att det kommer vara minst 700 bilar i bostadsområdet är

   $$P(\xi \geq 700) = 1 - \Phi\left(\frac{700-720}{12}\right) = 1 - \Phi(-1.67) = \Phi(1.67) = 0.95$$

   (d) Antal parkeringsplatser x som bostadsområdet minst måste ha för att sannolikheten för att alla bilar får parkeringsplats är 90%, ges av

   $$\Phi\left(\frac{x-720}{12}\right) = 0.90 \Longleftrightarrow \frac{x-720}{12} = \{\text{Tabell}\} = 1.28 \Longleftrightarrow x = 735 \text{ bilar.}$$

2. Givet sex oberoende mätningar som gav värdena $22, 24, 21, 24, 27, 32$ av en normalfördelad stokastisk variabel. Ge ett tvasidigt 90%:s konfidensintervall

   (a) för μ då $\sigma = 2.0$:

   $$25 - \frac{1.645 \cdot 2}{\sqrt{6}} < \mu < 25 + \frac{1.645 \cdot 2}{\sqrt{6}} \text{ d.v.s. } 23.7 < \mu < 26.3$$

   med konfidensgrad $0.9 = 90\%$.

   (b) För μ då σ okänd: Kvantilen är $t_{0.05,5} = \{\text{tabell}\} = 2.0$. Det ger

   $$25.0 - \frac{2.0 \cdot 4.0}{\sqrt{6}} < \mu < 25.0 + \frac{2.0 \cdot 4.0}{\sqrt{6}} \text{ d.v.s. } 21.7 < \mu < 28.3$$

   med konfidensgrad $0.9 = 90\%$.

   (c) För σ^2 och σ då μ okänd: Kvantiler som behövs är $\chi^2_{0.05,5} = 11.1$ och $\chi^2_{0.95,5} = 1.15$.

   $$\frac{(6-1)s^2}{\chi^2_{0.05,5}} < \sigma^2 < \frac{(6-1)s^2}{\chi^2_{0.95,5}} \text{ d.v.s. } 7.2 < \sigma^2 < 69.5\,.$$

   Motsvarande intervall för σ är

   $$2.7 < \sigma < 8.3$$

   med konfidensgrad $0.9 = 90\%$.

3. (a) Tesen ger följande sannolikheter

   $$P(S=0|M=1) = 0.01, \quad P(M=0|S=1) = 0.02, \quad P(S=0) = 0.45.$$

   Sannolikheten att tecknet 1 både sänds och mottas är

   $$P(\{S=1\} \cap \{M=1\}) = P(M=1|S=1)P(S=1) = (1-0.02)\cdot(1-0.45) = 0.539 \approx 0.54.$$

   (b) Sannolikheten att tecknet 0 mottas är

   $$\begin{aligned} 1 - P(M=1) &= 1 - P(S=1) \cdot \frac{P(M=1|S=1)}{P(S=1|M=1)} = 1 - \frac{0.55 \cdot 0.98}{0.99} = \\ &= 1 - \frac{0.539}{0.98} = 1 - 0.54 = 0.46. \end{aligned}$$

4. På transportföretaget Omnibus i Stuvesberg har nio bussar, som skall trafikera linjerna 22, 33 och 44 med två, tre respektive fyra bussar.

   (a) På hur många sätt kan bussarna fördelas på de tre linjerna?

Lösning: På linje 22, $\binom{9}{2}$ och linje 33, $\binom{7}{3}$, alltså totalt

$$36 \cdot 35 = 1260.$$

(b) Det visar sig att två bussarna har fel på styrsystemet. Vad är sannolikheten att de hamnar på samma linje?

Lösning:

$$m = 1260 \text{ och } g = g_2 + g_3 + g_4$$

där g_j är antal möjligheter att de hamnar på linje jj.

$$g_2 = \binom{7}{3} = 35, \quad g_3 = \binom{7}{1} \cdot \binom{6}{2} = 105, \quad g_4 = \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} = 210$$

Sannolikheten är alltså

$$\frac{350}{1260} = \frac{5}{18}.$$

5. (a) sannolikheten att systemet fungerar högst ett år är

$$P(\xi_1 \le 1 \wedge \xi_2 \le 1) = \{\text{ober.}\} = P(\xi_1 \le 1) \cdot P(\xi_2 \le 1) = (1 - e^{-1/2})^2.$$

(b) Ur (a) får vi fördelningsfunktionen för elsystemets livslängd som

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{om } t < 0 \\ (1 - e^{-t/2})^2, & \text{om } t \ge 0 \end{cases}$$

6. (a) För att räkna ut samspelseffektera behöver vi beräkna hela beräkningsplanen genom att multiplicera kolumnerna för A och C. Detta ger oss:

Nr.	A	B	C	AC	y
1	-	-	-	+	79.5
2	+	-	-	-	100.8
3	-	+	-	+	80.3
4	+	+	-	-	101.0
5	-	-	+	-	86.5
6	+	-	+	+	110.0
7	-	+	+	-	85.8
8	+	+	+	+	110.2

Våra effekter blir då:

$$l_B = \frac{-79.5 - 100.8 + 80.3 + 101.0 - 86.5 - 110.0 + 85.8 + 110.2}{4} = 0.1225$$
$$l_{AC} = \frac{+79.5 - 100.8 + 80.3 - 101.0 - 86.5 + 110.0 - 85.8 + 110.2}{4} = 1.4525$$

(b) l_{Ac} är signifikant eftersom $l_{AC} \notin [-0.69, 0.69]$.

(c) Utifrån uträkningarna får vi att effekterna M, l_A, l_C och l_{AC} är signifikanta. Detta gör att vår modell blir:

$$y = \beta_0 + \beta_A x_A + \beta_B x_C + \beta_{AC} x_A x_C + e = 94.3 + 5.6 x_A + 1.95 x_C + 0.726 x_A x_C + e$$

där $e \sim N(0, \frac{1}{2})$ och motsvarar mätbrus.

7. (a) Från uppgiften får vi att $N = 10000$, $n_1 = n_2 = 10$, $c_1 = 2$, $r_1 = r_2 = 5$ och $p = 0.1$. Vi söker nu sannolikheten att att acceptera partiet. Vi vet att antalet defekta enheter följer en hypergeometrisk fördelning men eftersom

$\frac{n_1+n_2}{N} < 0.1$ kan vi göra en binomialapproximation. Sanolikheten att acceptera kan skrivas som:

$$P(\text{acceptera}) = P(\text{acceptera i urval } 1) + P(\text{acceptera i urval } 2) =$$
$$P(\varepsilon_1 \leq c_1) + P(c_1 < \varepsilon_1 < r_1 \cap \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < r_2) =$$
$$P(\varepsilon_1 = 0) + P(\varepsilon_1 = 1) + P(\varepsilon_1 = 2) + P(\varepsilon_1 = 3)(P(\varepsilon_2 = 0) + P(\varepsilon_2 = 1)) + P(\varepsilon_1 = 4)P(\varepsilon_2 = 0)$$

Eftersom vi kan göra en binomialapproximation får vi att:

$$P(\varepsilon_1 = 0) = P(\varepsilon_2 = 0) = \binom{10}{0} 0.9^{10} = 0.3487$$
$$P(\varepsilon_1 = 1) = P(\varepsilon_2 = 1) = \binom{10}{1} 0.98^{9} 0.1 = 0.387$$
$$P(\varepsilon_1 = 2) = P(\varepsilon_2 = 2) = \binom{10}{2} 0.9^{8} 0.1^{2} = 0.194$$
$$P(\varepsilon_1 = 3) = \binom{10}{3} 0.9^{7} 0.1^{3} = 0.0574$$
$$P(\varepsilon_1 = 4) = \binom{10}{4} 0.9^{6} 0.1^{4} = 0.0112$$

Detta ger att sanolikheten att acceptera blir 0.97595

(b) Det förväntade provomfånget definieras som:

$$\text{ATI}(0.1) = n_1 P(\text{acceptera i urval } 1) + (n_1 + n_2)P(\text{acceptera i urval } 2) + NP(\text{avvisa partiet})$$

där $n_1 = n_2 = 10$ och $N = 10000$. Från uppgift a) fick vi att

$$P(\text{acceptera i urval } 1) = P(\varepsilon_1 \geq 2) = P(\varepsilon_1 = 0) + P(\varepsilon_1 = 1) + P(\varepsilon_1 = 2) = 0.9298$$

och

$$P(\text{acceptera i urval } 2) = P(c_1 < \varepsilon_1 < r_1 \cap \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < r_2) =$$
$$P(\varepsilon_1 = 3)(P(\varepsilon_2 = 0) + P(\varepsilon_2 = 1)) + P(\varepsilon_1 = 4)P(\varepsilon_2 = 0) = 0.04614.$$

sannolikheten för att avvisa partiet ges av:

$$P(\text{avvisa partiet}) = 1 - P(\text{acceptera partiet}) = 1 - 0.97595 = 0.02405.$$

Detta ger att vårt förväntade antal kontrollerade enheter blir:

$$ATI(0.02) = 10 \cdot 0.9298 + 20 \cdot 0.04614 + 10000 \cdot 0.02405 \approx 251$$

8. (a) Eftersom vi behandlar en kvantitativ kontrollvariabel är det lämligt att utgå från ett X-diagram. För att även undersöka förändraingar i spridning behöver vi även undersöka ett s-diagram.

x-diagram:

Först beräknar vi vår centrallinje genom att ta medelvärdet av våra medelvärden.

$$\text{CI} = \bar{\bar{x}} = 39.51$$

För att sätta upp våra kontrollgränser behöver vi också medelvärdet av standardavvikelserna.

$$\bar{s} = 1.11$$

Våra kontrollgränser ges nu av:

$$\bar{\bar{x}} \pm A\bar{s}$$

där A fås från tabell till $A = 0.789$.

Övre och undre styrgränserna blir då $[38.634, 40.386]$.

s-diagram:

Övre styrgränsen ges av $S_ö = B_4\bar{s} = 0.428 \cdot 1.11 = 1.745$. Undre styrgränsen ges av $S_u = B_3\bar{s} = 1.572 \cdot 1.11 = 0.475$ där B_3 och B_4 fås från tabell med $n = 15$

Studerar vi alla värden ser vi att alla våra givna värden ser vi att alla $\bar{x} \in [38.634, 40.386]$ för alla värden och $s \in [0.475, 1.745]$ för alla givna värden s. På grund av detta kan vi konstatera att processen är under statistisk kontroll.

(b) Eftersom vi nu istället är intresserad av en kvantitativ indikator där vi studerar deffekta och ickedeffekta enheter är det lämpligt med ett np-diagram.

För att sätta upp ett np-digram skattar vi först sannolikheten för att en given enhet är deffekt.

$$\hat{p} = \frac{6 + 12 + 11 + 5 + 7 + 9 + 6 + 13 + 16 + 21}{10 \cdot 1000} = 0.0106$$

Med en normalapproximation får vi att vi kan approximera antalet defekta eneheter som en normalfördelning med väntevärde $n\hat{p} = 1000 \cdot 0.0106 = 10.6$ samt med en standardavvikelse $s = \sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})} = 10.488$. Våra styrgränser blir då $n\hat{p} \pm 3\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})} = [0.8846, 20.32]$.

Vi kan nu konstatera att processen inte är under statistisk kontroll eftersom vi fick mer 21 defekta enheter vid mättilfälle 10 vilket är över vår övre styrgräns.

Vi kan också konstatera att $n\hat{p}(1-\hat{p}) = 10.5 > 10$ vilket gör att vår normalapproximation är rimlig.