GAMMAL TENTAMEN LEU 236

1

Figuren nedan visar ett system med ett dragfordon och en vagn på ett horisontellt spår utan friktion, vilka är hopkopplade med en fjäder (fjäderkonstant k) och en dämpare (dämpkonstant b). Motorn i dragfordonet ger kraften u.

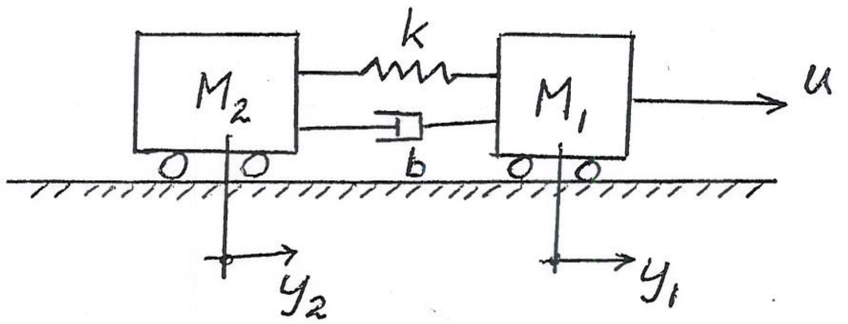
Bestäm en tillståndsmodell för systemet. Välj positionerna (y_1 och y_2) samt hastigheterna ($\dot{y}_1$ och $\dot{y}_2$) som tillstånd, d v s

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = \dot{y}_1 \\ x_4 = \dot{y}_2 \end{cases}$$

Som utsignaler (z_1 och z_2) kan du välja följande två variabler:

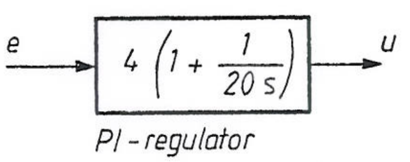
- Positionen på dragfordonet,
- Det relativa avståndet mellan dragfordon och vagn (y_1-y_2)

Insignal är dragkraften u. (3 p)



2

En analog PI-regulator har förstärkningen $K = 4$ och integrationstiden $T_I = 20s$. Skriv om den analoga överföringsfunktionen för regulatorn till en approximativ tidsdiskret motsvarighet och bestäm därefter motsvarande differensekvation. Använd den bilineära transformen. Antag att samplingsintervallet är $h = 0,5$ sekunder.

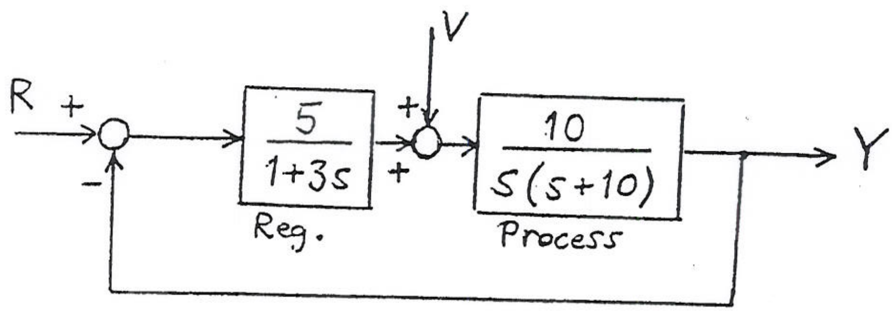


$\begin{cases} e = \text{felsignal} \\ u = \text{styrsignal} \end{cases}$

(2p)

3

Bestäm den totala överföringsfunktionen från V till Y för nedanstående reglersystem. Beskriv kortfattat vad denna överföringsfunktion kan användas till. (2p)



4

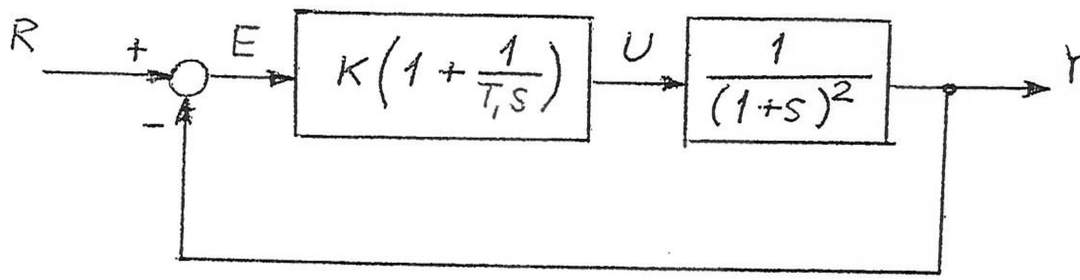
Bestäm amplitudfunktionen och fasfunktionen för nedanstående process och bestäm med hjälp av dem processens fasvridning och amplitudförstärkning vid frekvensen 2 rad/s. (2p)

$$G = \frac{2+s}{(1+s)^2}$$

5

Figuren nedan visar ett reglersystem med en PI-regulator, där vi kan anta att både K och T_I är större än noll.
För vissa kombinationer av K och T_I är systemet stabilt, medan andra kombinationer ger ett instabilt system. Bestäm för vilka värden på T_I som systemet är stabilt (som funktion av K).

(2 p)



6

Rita ett exakt Bodediagram för nedanstående process. Bestäm därefter en PI-regulator för processen, så att fasmarginalen blir 40 grader. Använd bifogad arbetsmetodik för bestämning av parametrarna i regulatorn (K och T_I). Beräkna också approximativ stigtid t_r för det erhållna systemet. (3p)

$$G(s) = \frac{4}{(1+5s)(1+0,5s)}$$

Till uppgift

Arbetsmetodik – dimensionering av PI-regulatorer

1) Rita först Bodediagram för den process $G_P(s)$ som ska regleras.

2) Bestäm sedan det K-värde som vid ren P-reglering hade givit fasmarginalen $\varnothing_m = \varnothing_{min} + 11$ grader.

Orsaken till de extra 11 graderna på fasmarginalen är att den integrerande delen sedan kommer att försämra fasmarginalen i motsvarande utsträckning, se punkt 3.

3) Bestäm vilken överkorsningsfrekvens ω_c som erhålls med ovanstående K-värde. Bestäm därefter T_I så att brytfrekvensen ω_b för PI-regulatorn hamnar på lämpligt avstånd från ω_c.

Ett lämpligt läge för brytfrekvensen är $\omega_b = 0,2\ \omega_c$.
Detta ger:

$$\omega_b = \frac{1}{T_I} = 0,2\ \omega_c \Rightarrow T_I = \frac{1}{0,2\ \omega_c}$$

Detta val av T_I gör att fasmarginalen försämras med 11 grader.

7

a)

En process med den analoga överföringsfunktionen $G(s) = 10/(1+5s)$ ska regleras med den tidsdiskreta proportionella regulatorn $H_R(z) = 3{,}4$.

Beräkna hur långt samplingsintervall man kan ha innan systemet blir instabilt.

(2 p)

---

b)

Beräkna de första 8 värdena på stegsvaret för en process som beskrivs med följande differensekvation (använd metoden med iterativa beräkningar).

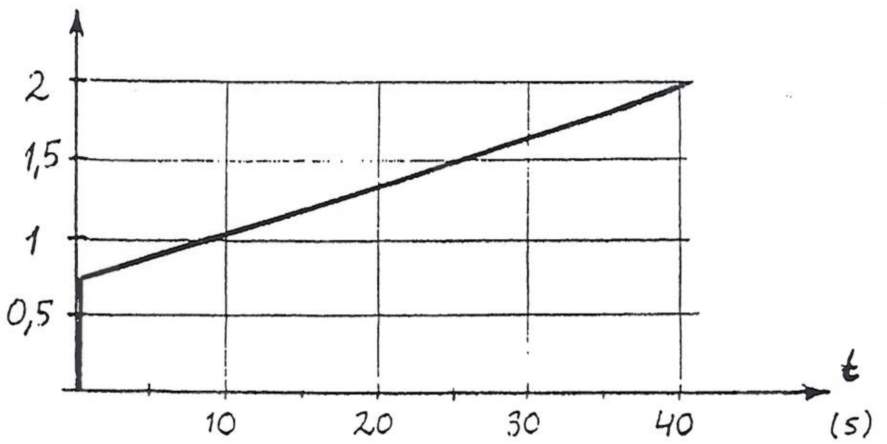
$y(k) = 0{,}6\, y(k-1) + 0{,}3\, u(k-1) + 0{,}7\, u(k-2).$

(1 p)

---

c)

Figuren nedan visar stegsvaret för en PI-regulator. Bestäm integrationstiden T_I och förstärkningen K.

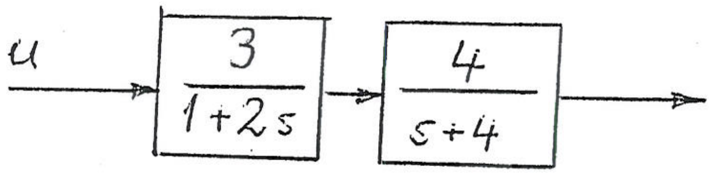


PI-regulatorns överföringsfunktion antas vara $G = K\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$.

(1 p)

8

Ställ upp nedanstående system på tillståndsform, d v s bestäm A-matrisen, B-matrisen och C-matrisen i tillståndsbeskrivningen av systemet. Tillståndsmodellen skall vara på **diagonalform**, d v s alla parametrar utanför huvuddiagonelen i A-matrisen skall vara noll. (2p)



Lösningar

1

Newtons andra lag ger

Massa 1

$$M_1 \ddot{y}_1 = u - k(y_1 - y_2) - b(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$$

$$\Rightarrow M_1 \dot{x}_3 = u - k(x_1 - x_2) - b(x_3 - x_4)$$

Massa 2

$$M_2 \ddot{y}_2 = k(y_1 - y_2) + b(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$$

$$\Rightarrow M_2 \dot{x}_4 = k(x_1 - x_2) + b(x_3 - x_4)$$

Vidare gäller

$$\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = x_3$$
$$\dot{x}_2 = \dot{y}_2 = x_4$$

Detta ger tillståndsmodellen

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{M_1} & \frac{k}{M_1} & -\frac{b}{M_1} & \frac{b}{M_1} \\ \frac{k}{M_2} & -\frac{k}{M_2} & \frac{b}{M_2} & -\frac{b}{M_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

2

$$G = 4\left(1 + \frac{1}{20s}\right) \qquad \text{Byt } s \to \frac{2}{h}\frac{(z-1)}{(z+1)}$$

$$h = 0{,}5 \Rightarrow \quad s \to \frac{4(z-1)}{z+1}$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = 4\left[1 + \frac{1}{20 \cdot \frac{4(z-1)}{(z+1)}}\right] = 4\left[1 + \frac{z+1}{80(z-1)}\right] =$$

$$\Rightarrow \frac{U}{E} = 4\left[\frac{81z - 79}{80(z-1)}\right] = \frac{81z - 79}{20z - 20} = \frac{4{,}05 - 3{,}95z^{-1}}{1 - z^{-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad U(1 - z^{-1}) = E(4{,}05 - 3{,}95z^{-1})$$

dvs $$u(k) = u(k-1) + 4{,}05\, e(k) - 3{,}95\, e(k-1)$$

3

$$\frac{Y}{V} = \frac{\frac{10}{s(s+10)}}{1 - -\frac{50}{(1+3s)s(s+10)}} = \frac{10(1+3s)}{(1+3s)s(s+10) + 50} =$$

$$= \frac{10 + 30s}{3s^3 + 31s^2 + 10s + 50}$$

Användning: Tex för att utröna hur olika störningar påverkar utsignalen Y.

4

$$G(j\omega) = \frac{2+j\omega}{(1+j\omega)^2}$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{\sqrt{4+\omega^2}}{\left(\sqrt{1+\omega^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4+\omega^2}}{1+\omega^2}$$

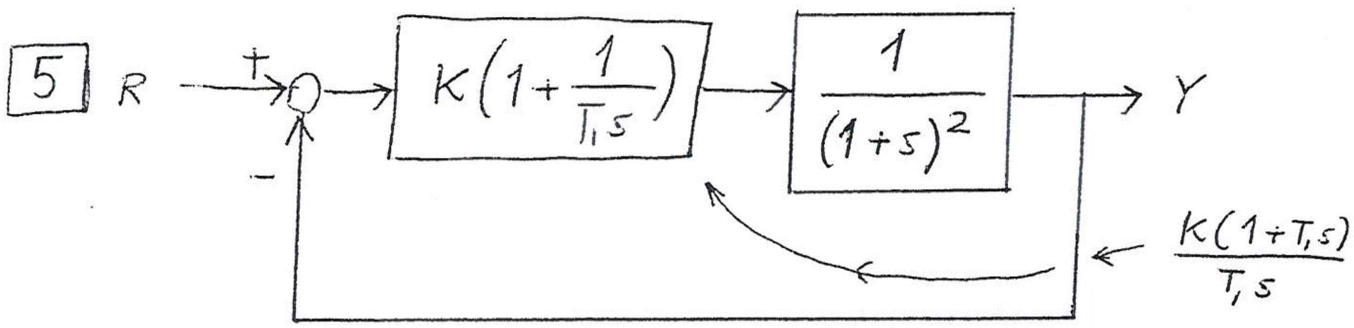
$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) - 2\arctan(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad A(2) = \frac{\sqrt{8}}{5} = 0{,}566$$

$$\varphi(2) = \arctan(1) - 2\arctan(2) =$$

$$= 45^\circ - 126{,}9 = -81{,}9^\circ$$

5



$$G_{TOT} = \frac{\dfrac{K(1+T_1 s)}{(1+s)^2 T_1 s}}{1 + \dfrac{K(1+T_1 s)}{(1+s)^2 T_1 s}} = \frac{K(1+T_1 s)}{(1+s)^2 T_1 s + K(1+T_1 s)} =$$

$$= \frac{K(1+T_1 s)}{T_1 s^3 + 2T_1 s^2 + (1+K)T_1 s + K}$$

Rouths metod

s^3	T_1	$(1+K)T_1$
s^2	$2T_1$	K
s^1	a	0
s^0	K	

$$a = \frac{2T_1^2(1+K) - T_1 K}{2T_1} =$$

$$= \frac{2T_1(1+K) - K}{2}$$

Villkor för stabilitet

$$2T_1(1+K) - K > 0$$

$$\Rightarrow 2T_1(1+K) > K$$

$$\Rightarrow 2T_1 > \frac{K}{1+K}$$

$$\boxed{T_1 > \frac{K}{2(1+K)}}$$

6

ω	φ
0.1	-27 - 3 = -30
0.2	-45 - 6 = -51
0.5	-68 - 14 = -82
1	-79 - 26 = -105
2	-84 - 45 = -129
4	-87 - 63 = -150
8	-89 - 76 = -165

Ampl. kurvan ritas med asymptot-metoden!

Faskurvan fås med räknedosemetoden!

$$\varphi(\omega) = -\arctan(5\omega) - \arctan(0{,}5\omega)$$

Steg 2 $\quad \phi_m = 40 + 11 = 51^\circ$ fås vid $\omega = 1{,}9$ rad/s

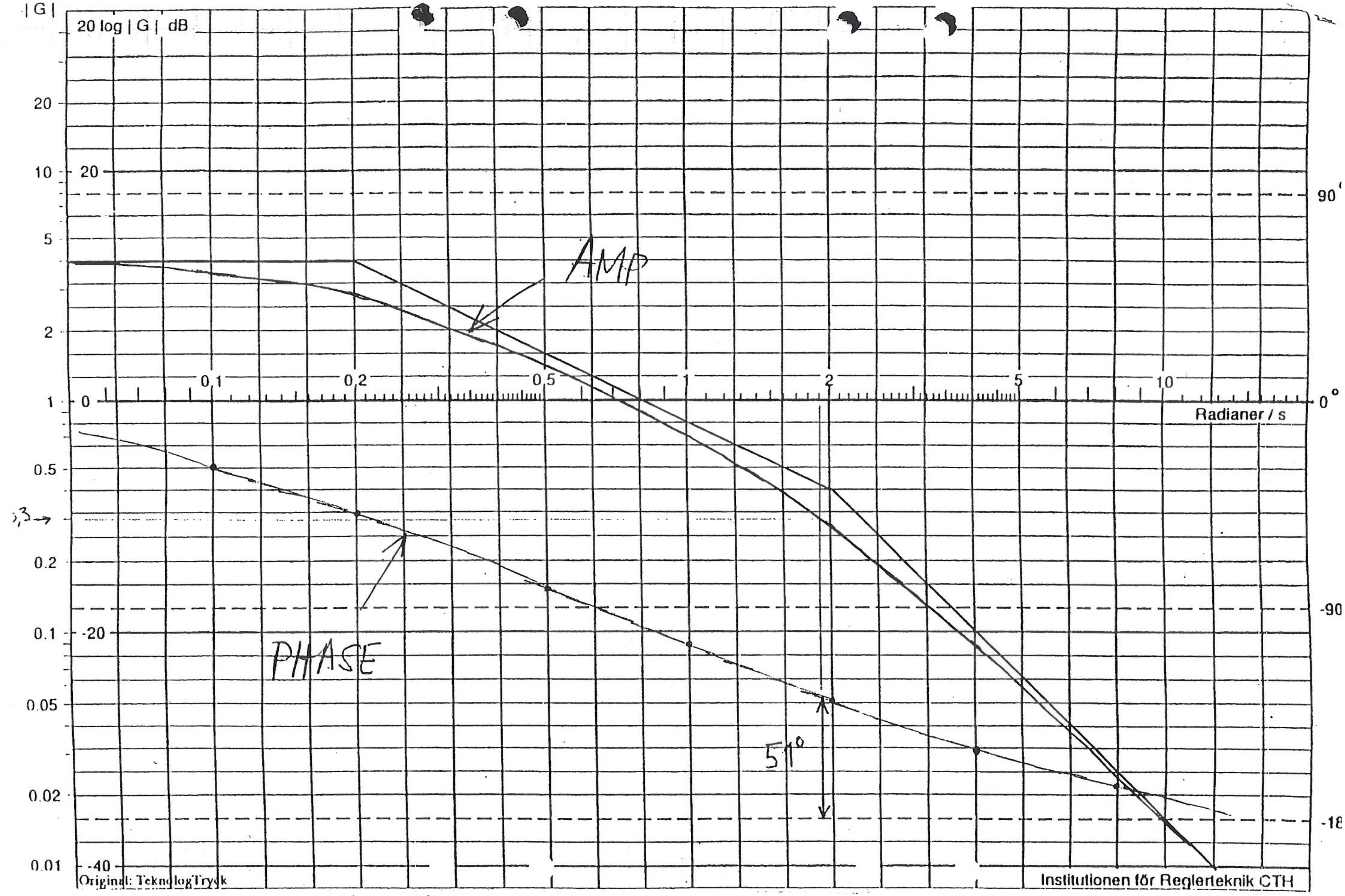
$$|G(1{,}9)| = 0{,}3 = -10{,}5 \text{ dB}$$

Välj $\quad K = \dfrac{1}{0{,}3} = \underline{\underline{3{,}33 \text{ ggr}}}$

Steg 3 $\quad \Rightarrow \omega_c = 1{,}9$ rad/s

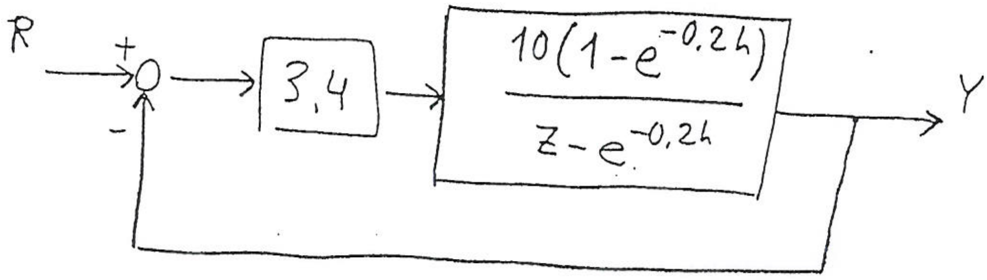
$$\Rightarrow T_1 = \frac{1}{0{,}2 \cdot 1{,}9} = \underline{\underline{2{,}63}}$$

Approximativ stigtid $\quad t_r \approx \dfrac{1{,}4}{1{,}9} = \underline{\underline{0{,}74 \text{ s}}}$


|G|
20 log |G| dB
20
10
5
2
1
0.5
0.2
0.1
0.05
0.02
0.01
20
0
-20
-40
0.1
0.2
0.5
1
2
5
10
Radianer / s
90°
0°
-90
AMP
PHASE
0,3
51°
Original: TeknologTryck
Institutionen för Reglerteknik CTH

$\boxed{7}$

$$G(s)=\frac{10}{1+5s}=\frac{2}{s+0,2} \Rightarrow H(z)=10\,\frac{1-e^{-0,2h}}{z-e^{-0,2h}}$$

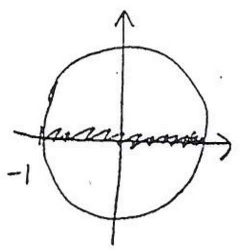


$$H_{tot}=\frac{\dfrac{34(1-e^{-0,2h})}{z-e^{-0,2h}}}{1+\dfrac{34(1-e^{-0,2h})}{z-e^{-0,2h}}}=\frac{34(1-e^{-0,2h})}{z-e^{-0,2h}+34(1-e^{-0,2h})}\Rightarrow$$

Kar. ekv $\Rightarrow$ $z+34-35e^{-0,2h}=0$

Pol

$$z=35e^{-0,2h}-34$$



Villkor $35e^{-0,2h}-34>-1$

$$\Rightarrow 35e^{-0,2h}>33$$

$$e^{-0,2h}>\frac{33}{35}$$

$$e^{-0,2h}=\frac{33}{35}\Rightarrow -0,2h=\ln\left(\frac{33}{35}\right)\Rightarrow h=-5\cdot\ln\left(\frac{33}{35}\right)=0,294$$

$\underline{\underline{\text{Svar}}}$ Max $(h)=0,294$

7b

k	$u(k)$	$0{,}3 \cdot u(k-1)$	$0{,}7 \cdot u(k-2)$	$0{,}6 \cdot y(k-1)$	$y(k)$
0	1	0	0	0	0
1	1	0,3	0	0	0,3
2	1	0,3	0,7	0,18	1,18
3	1	0,3	0,7	0,708	1,708
4	1	0,3	0,7	1,0248	2,0248
5	1	0,3	0,7	1,21488	2,21488
6	1	0,3	0,7	1,3289	2,3289
7	1	0,3	0,7	1,3974	2,3974
8	1	0,3	0,7	1,4384	2,4384

7c

Mätningar i stegsvaret ger

$u(0) = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad K = 0{,}75$

$u(25) = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 25$

dvs $\boxed{K = 0{,}75 \quad T_1 = 25}$

8

Partial bråks-uppdel-ning

$$G = \frac{12}{(1+2s)(s+4)} = \frac{A}{1+2s} + \frac{B}{s+4} =$$

$$= \frac{A(s+4) + B(1+2s)}{(1+2s)(s+4)} = \frac{s(A+2B) + (4A+B)}{(1+2s)(s+4)}$$

$$\begin{cases} A + 2B = 0 & (1) \\ 4A + B = 12 & (2) \end{cases}$$

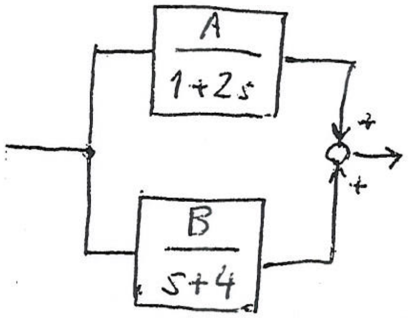
$(1) \Rightarrow A = -2B$

$(2) \Rightarrow 4(-2B) + B = 12$

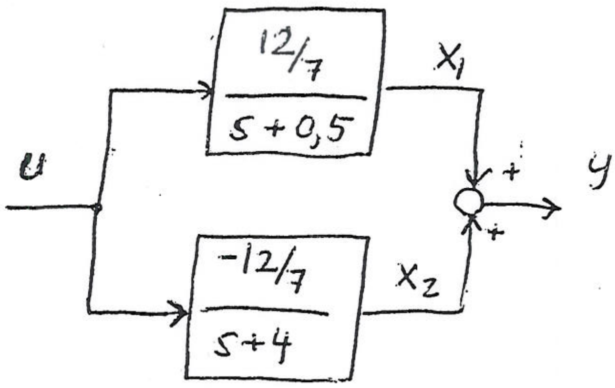
$\Rightarrow -7B = 12 \qquad B = -\frac{12}{7}$

$A = \frac{24}{7}$

Systemet kan ritas



eller



Vi ser $\frac{X_1}{U} = \frac{12/7}{s+0{,}5} \Rightarrow \dot{x}_1 = -0{,}5\,x_1 + \frac{12}{7}u$

$\frac{X_2}{U} = \frac{-12/7}{s+4} \Rightarrow \dot{x}_2 = -4\,x_2 - \frac{12}{7}u$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{12}{7} \\ -\frac{12}{7} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$