Exam in Fysik 2, FFY144 – English version

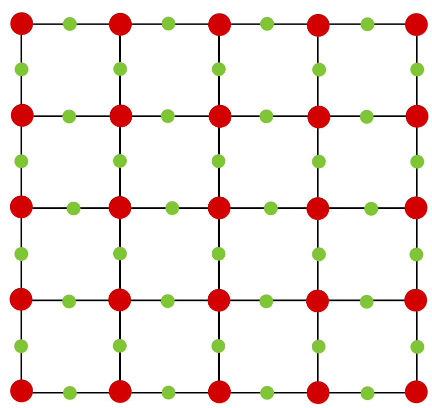
Note: There is a separate Swedish version as well.

Time: Tuesday 4/1/2022
Teacher: Johannes Hofmann, hofmannj@chalmers.se
Aids: One sheet of A4 with custom content (front and backside, written by yourself by hand or with a computer), Beta, Physics Handbook (or a similar collection of formulas), non-programmable calculator (natural constant are ok).
Grade: Max. 25 points; passing grade: 10 points
NOTE! You may assume formulas from the lectures without deriving them.
Questions during the exam: 0763368963 (alternatively 0723087160)

---

1. The Lieb lattice

The plot below shows the two-dimensional Lieb lattice, named after Elliott H. Lieb, an American physicist. It consist of one type of atoms A (red points) that form a square lattice, where in between two neighbouring lattice points sits another type of atom B (green points). Denote the distance between two red A atoms by a.



The Lieb lattice

a) Draw a primitive (=smallest possible) unit cell. Is the lattice a Bravais lattice? *(1P)*

b) Write down the basis vectors and the primitive lattice vectors of the Lieb lattice. *(1P)*

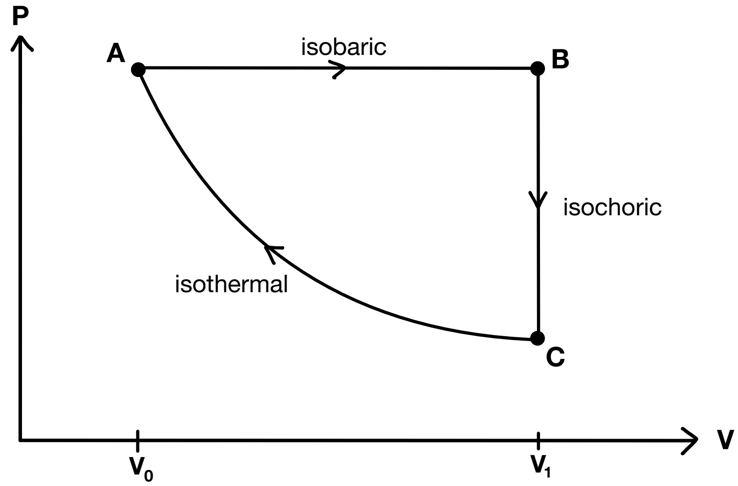
c) Write down the reciprocal lattice vectors of the Lieb lattice and sketch the reciprocal lattice. *(1P)*

d) Compute the structure factor of the Lieb lattice. Assume that the scattering amplitude of the B atoms is half of the scattering amplitude of the A atoms: $f_B = \frac{1}{2} f_A$. State the Miller indices and structure factors of the first three scattering reflexes. *(1P)*

e) Sketch and explain how the suppression of the reflex (11) is linked to interference on lattice planes in the real-space lattice. *(1P)*

2. Thermodynamic cycle

The P-V diagram below shows a thermodynamic cycle. The cycle begins at point A when an ideal gas expands at constant pressure P_1 from a volume V_0 to a volume V_1 ($A \to B$) and temperature $T_B = T_h$, followed by cooling at constant volume ($B \to C$). The gas then contracts at constant temperature T_c from V_1 to V_0 ($C \to A$) to reach the starting point. Assume an ideal gas as working medium with $C_V = \frac{3}{2}Nk_B$ and $C_P = \frac{5}{2}Nk_B$.



P-V diagram of a thermodynamic cycle

(a) For every step in the cycle ($A \to B$, $B \to C$, and $C \to A$), write down how much heat Q is exchanged and how much work W is done. *(2P)*

(b) Show that the efficiency is

$$\eta = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{T_c}{T_h - T_c}\ln\frac{T_h}{T_c}\right) \qquad . \text{ (1P)}$$

(c) What is the maximum efficiency η? Given the temperature T_c of the cold reservoir, for which hot temperatures T_h is the maximal η reached? Compare your result with the Carnot efficiency. *(1P)*

(d) Now assume that the heat in step $B \to C$ is not released into the cold reservoir, but is instead used to contribute to the heating of the gas in step $A \to B$. Compute the new efficiency of this modified thermodynamic cycle. *(1P)*

3. The free electron gas

Consider the following wavefunction that describes an electron in a three-dimensional box,

$$\psi_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{-i\omega(\mathbf{k})t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

where t is the time coordinate, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ the position vector, L is the side length of the box, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_y)$ the wavevector, and $\omega(\mathbf{k})$ the frequency.

(a) Determine the energy dispersion $E(\mathbf{k}) = \hbar\omega(\mathbf{k})$ by solving the Schrödinger equation

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_{\mathbf{k}}(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi_{\mathbf{k}}(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_{\mathbf{k}}(t, x)\right) = E(k)\,\psi_{\mathbf{k}}(t, x).$$

(2P)

(b) State the Pauli principle and explain which plane-wave states are occupied at zero temperature. *(1P)*

(c) Sketch the dispersion $E(\mathbf{k})$ as a function of k_x for $k_y = 0$ and $k_z = 0$. Mark the Fermi energy and the Fermi momentum. *(1P)*

(d) Sketch the dispersion $E(\mathbf{k})$ and mark the occupied states if a charge current flows in the x-direction (for example, when an electric field is applied along the box). *(1P)*

4. Voltage across solar cells

a) Explain the relation

$$I(U) = I_{\mathrm{sc}} - I_0\left(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1\right)$$

that links the total current I across a solar cell to the short-circuit current I_{sc}, the voltage U across the cell, and the temperature T. *(1P)*

b) Sketch the current I as a function of the voltage U. *(1P)*

c) Write down an equation for the open-circuit voltage U_{oc} (= voltage at which the current is zero: $I(U_{\mathrm{oc}}) = 0$). *(1P)*

d) At room temperature ($T = 300K$), a solar cell has a short-circuit current of $I_{\mathrm{sc}} = 2A$ and an open-circuit voltage of $U_{\mathrm{oc}} = 0.5V$. Determine the reverse bias current I_0 of the solar cell. *(1P)*

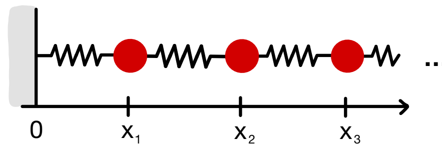
e) How does the open-circuit voltage change if the short-circuit current drops by a factor of 2? *(1P)*

You might find the following constant useful:

ratio of Boltzmann constant and electron charge: $k_B/e = 8.62 \cdot 10^{-5} V/K$

5. Localised phonons

Consider a one-dimensional lattice that is fixed at one end to a wall. At rest, the atoms have equilibrium positions $x_n = na$, where $n = 1, 2, 3, \ldots$ and a is the lattice constant. The force between neighbouring atoms is modelled by a spring with spring constant α. The mass of an atom is m.



A one-dimensional crystal with a hard wall at the origin.

(a) Write down the equations of motion for the atoms in the lattice. *(1P)*

(b) Consider the following ansatz for the displacement field $u_n(t) = x_n(t) - na$:

$$u_n(t) = A\sin(kna - \omega t),$$

where ω is the frequency and k the wavenumber. Explain why this describes a wave that moves to the right. *(1P)*

(c) Solve the equation of motion for the ansatz and derive an expression for ω as a function of k. *(2P)*

(d) Explain why the full solution in the presence of a hard wall at the origin is

$$u_n(t) = A\Big[\sin(kna - \omega t) + \sin(kna + \omega t)\Big] \qquad .$$ *(1P)*

You might find the following trigonometric identities useful:

$$\sin(2X) = 2\cos(X)\sin(X)$$
$$\sin(X \pm Y) = \sin(X)\cos(Y) \pm \cos(X)\sin(Y)$$

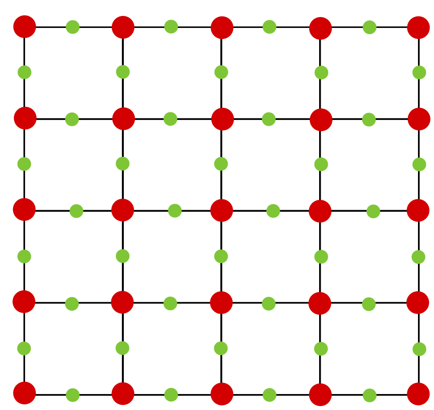
Tentamen i Fysik 2, FFY144 – Svensk version

Tid och plats: tisdag 4/1, 2022
Lärare: Johannes Hofmann, hofmannj@chalmers.se
Hjälpmedel: Ett A4 blad med valfritt innehåll (fram och baksidan-handskriven eller skapad med hjälp av dator); Beta, Physics Handbook (eller liknande formelsamling), valfri räknare med tömt minne (inprogrammerade naturkonstanter är dock ok).
Bedömning: Maximalt 25 poäng (+1 bonus poäng)
OBS! Det går bra att använda formler utan att förklara hur man härleder dem.
Frågor under tentan: 0763 368963 (alternativt 0723087160)

---

1. Liebgittret

Figuren visar det två-dimensionella Liebgittret, namngett efter den amerikanska fysikern Elliott H. Lieb. Det består av atomer av typ A (röda punkter) som bildar ett kvadratiskt gitter, mellan vilka det sitter en annan typ av atom B (gröna punkter). Kortaste avståndet mellan två röda A-atomer betecknas a.



Liebgittret

a) Rita en primitiv (dvs., minsta möjliga) enhetscell. Är gittret ett Braviasgitter? *(1P)*

b) Skriv ner bas och primitiva gittervektorer. *(1P)*

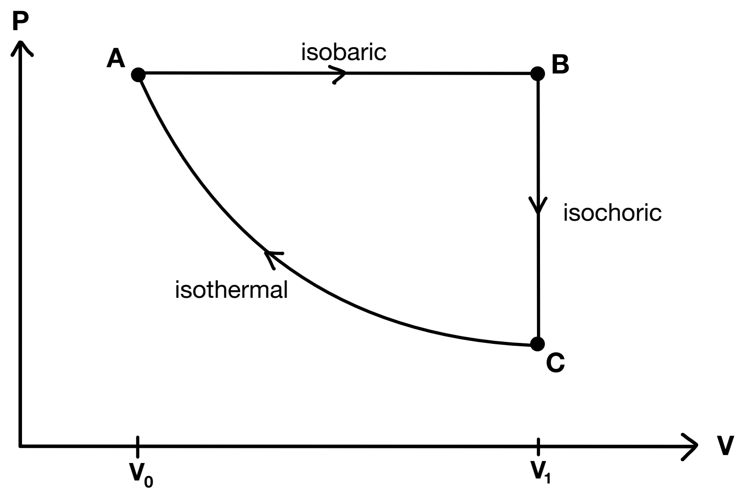
c) Skriv ner de reciproka gittervektorerna för Liebgittret och rita det reciproka gittret. *(1P)*

d) Beräkna strukturfaktorn för Liebgittret. Antag att den atomära spridningsamplituden för en B atom är hälften så stor som för en A atom: $f_B = \frac{1}{2} f_A$. Skriv ner Millerindex och strukturfaktor för de första tre reflexerna. *(1P)*

e) Skissa och förklara utsläckningen av (11) reflexen utgående från spridning mot kristallplan i det reella gittret. *(1P)*

2. Termodynamisk cykel

P-V-diagramet visar en termodynamisk cykel. Cykeln börjar i en punkt A då en ideal gas expanderar vid kontant tryck P_1 från en volym V_0 till en volym V_1 ($A \to B$) och temperatur $T_B = T_h$, följt av avkylning vid konstant volym ($B \to C$). Gasen komprimeras sedan vid konstant temperatur T_c från V_1 till V_0 ($C \to A$) för att nå startpunkten. Antag en ideal gas som arbetsmedium med $C_V = \frac{3}{2}Nk_B$ och $C_P = \frac{5}{2}Nk_B$.



P-V-diagram för en termodynamisk cykel

(a) För varje steg i cykeln ($A \to B$, $B \to C$, and $C \to A$), skriv ner hur mycket värme Q som utväxlas och hur mycket arbete W som görs. *(2P)*

(b) Visa att verkningsgraden ges av

$$\eta = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{T_c}{T_h - T_c}\ln\frac{T_h}{T_c}\right) \qquad . \textit{(1P)}$$

(c) Vad är maximala verkningsgraden η? Givet temperaturen T_c för värmesänkan, för vilken temperatur T_h uppnås den maximala η? Jämför ditt resultat med Carnotverkningsgraden. *(1P)*

(d) Antag nu att värmet i steg $B \to C$ inte avges till värmesänkan, utan istället används för att bidra till uppvärmningen av gasen i steg $A \to B$. Beräkna verkningsgraden för cykeln i detta fall. *(1P)*

3. Fria elektrongasen

Betrakta följande vågfunktion (s.k. planvåg) som beskriver en elektron i en tre-dimensionell låda,

$$\psi_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{-i\omega(\mathbf{k})t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

där t är tidskoordinaten, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ lägesvektorn, L är längden på lådan, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_y)$ vågvektorn, och $\omega(\mathbf{k})$ vinkelfrekvensen.

(a) Bestäm energidispersionen $E(\mathbf{k}) = \hbar\omega(\mathbf{k})$ genom att lösa Schrödingerekvationen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_{\mathbf{k}}(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi_{\mathbf{k}}(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_{\mathbf{k}}(t, x)\right) = E(k)\,\psi_{\mathbf{k}}(t, x).$$

(2P)

(b) Skriv ner Pauliprincipen och förklara vilka plan-våger som är besatta av en elektron vid noll temperatur. *(1P)*

(c) Skissa dispersionen $E(\mathbf{k})$ som funktion av k_x för $k_y = 0$ och $k_z = 0$. Markera Fermienergin och Fermivågtalet. *(1P)*

(d) Skissa dispersionen $E(\mathbf{k})$ och markera de besatta tillstånden givet en ström i x-riktningen. (t.ex., genom att ett elektriskt fält appliceras längs med boxens x-riktning). *(1P)*

4. Spänning över solceller

a) Förklara uttrycket

$$I(U) = I_{\mathrm{sc}} - I_0\Big(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1\Big)$$

som ger strömmen I över en solcell i termer av kortslutningsströmmen I_{sc}, spänningen U över cellen, och temperaturen T. *(1P)*

b) Skissa strömmen I som funktion av spänningen U. *(1P)*

c) Skriv ner en ekvation för öppna kretsspänningen U_{oc} (= spänning vid vilken strömmen är noll: $I(U_{\mathrm{oc}}) = 0$). *(1P)*

d) Vid rumstemperatur ($T = 300K$), har en solcell en kortslutningsström $I_{\mathrm{sc}} = 2A$ och en öppen kretsspänning $U_{\mathrm{oc}} = 0.5V$. Bestäm solcellens backström I_0. *(1P)*

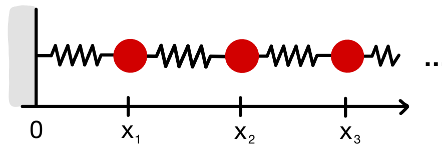
e) Hur ändras öppna kretsspänningen om kortslutningsströmmen minskas med en faktor 2? *(1P)*

följande konstant kan vara användbar:

kvoten mellan Boltzmannkonstanten och elektronens laddning: $k_B/e = 8.62 \cdot 10^{-5} V/K$

5. Lokaliserade fononer

Betrakta ett en-dimensionellt gitter där ena änden är fixerad vid en vägg. Vid vila har atomerna jämviktslägen $x_n = na$, där $n = 1, 2, 3, \ldots$ och a är gitterkonstanten. Kraften mellan närliggande atomer modelleras av en fjäder med fjäderkonstant α. Atomernas massa är m.



En en-dimensionell kristall med en vägg i origo.

(a) Skriv ner rörelseekvationen för atomerna. *(1P)*

(b) Betrakta följande ansats för avvikelsen från jämvikt $u_n(t) = x_n(t) - na$:

$$u_n(t) = A \sin(kna - \omega t),$$

där ω är vinkelfrekvensen och k vågtalet. Förklara varför detta beskriver en våg som rör sig åt höger. *(1P)*

(c) Lös rörelsekvationen med hjälp av ansatsen och härled ett uttryck för ω som funktion av k. *(2P)*

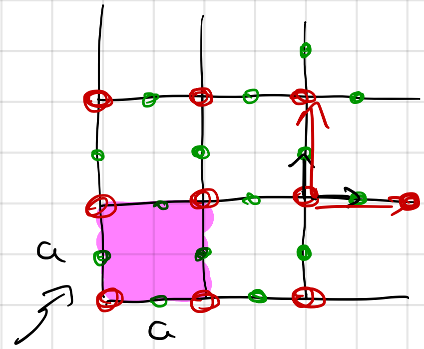
(d) Förklara varför den fullständiga lösningen givet väggen i origo är

$$u_n(t) = A\Big[\sin(kna - \omega t) + \sin(kna + \omega t)\Big] \qquad . \textit{(1P)}$$

Följande trigonometriska identiteter kan vara användbara:

$$\sin(2X) = 2\cos(X)\sin(X)$$
$$\sin(X \pm Y) = \sin(X)\cos(Y) \pm \cos(X)\sin(Y)$$

(1)



a) primitive cell. Not a Bravais lattice, it has inequivalent points

b)

Primitive vectors $\vec{a}_1 = (a, 0)$

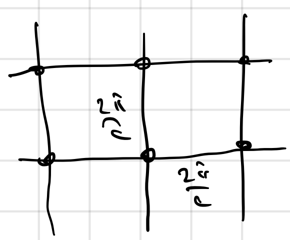
$\vec{a}_2 = (0, a)$

Basis A in $(0,0)$

B in $(\frac{a}{2}, 0)$, $(0, \frac{a}{2})$

c) Reciprocal lattice vectors:

$\vec{G}_{hk} = \frac{2\pi}{a}(h, k)$ h, k integers



square lattice, with lattice constant $\frac{2\pi}{a}$

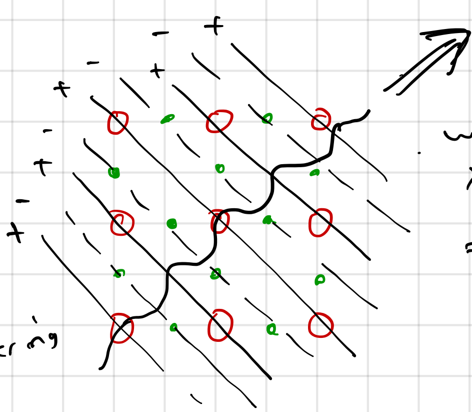
d) $S_{(hk)} = f_A + f_B \left(e^{-i\vec{G}_{hk}\cdot(\frac{a}{2},0)} + e^{-iG_{hk}\cdot(0,\frac{a}{2})} \right) =$

$= [f_B = f_A/2] = f_A \left(2 + e^{-i\pi h} + e^{-i\pi k}\right)/2$

h, k	S/f_A
0 1	1
1 1	0
0 2	2

e)

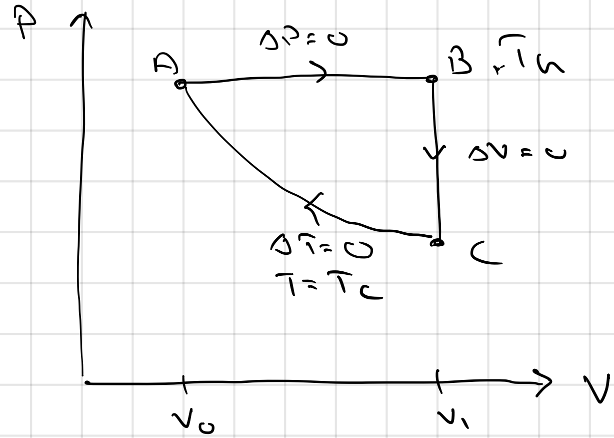
2 B out of phase scattering ⟹ per one A scattering



(1,1)

wavelength $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

(2)



$C_P = \frac{5}{2} N k_B$

$C_V = \frac{3}{2} N k_B$

a) $A \to B$: $Q_{AB} = C_P \Delta T = C_P (T_B - T_A) =$

$$= \left[T_A = T_C \; ; \; \frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \Rightarrow T_B = \frac{V_B}{V_A} T_A = \frac{V_1}{V_0} T_C \right]$$

$$= C_P T_C \left(\frac{V_1}{V_0} - 1 \right)$$

$$W_{AB} = -\int_{V_0}^{V_1} P\,dV = -P_A (V_1 - V_0) =$$

$$= -P_A V_0 \left(\frac{V_1}{V_0} - 1 \right) = N k_B T_C \left(1 - \frac{V_1}{V_0} \right)$$

$B \to C$: $W = 0$

$$Q_{BC} = C_V (T_C - T_B) = C_V T_C \left(1 - \frac{V_1}{V_0} \right) < 0$$

$C \to A$: $W_{CA} = -\int_{V_1}^{V_0} P\,dV = -N k_B T_C \int_{V_1}^{V_0} \frac{dV}{V} =$

$$= N k_B T_C \ln(V_1/V_0) > 0$$

$$\Delta T = 0 \Leftrightarrow \Delta E = 0 \Rightarrow Q_{CA} = -W_{CA} < 0$$

b) Efficiency : $\eta = \frac{\text{Total work out}}{\text{Supplied heat}} = \frac{-(W_{AB} + W_{CA})}{Q_{AB}}$

$$= \frac{-\cancel{N k_B T_C} \left(1 - \frac{V_1}{V_0} \right) - \cancel{N k_B T_C} \ln(V_1/V_0)}{\frac{5}{2} \cancel{N k_B T_C} \left(\frac{V_1}{V_0} - 1 \right)} =$$

$$= \frac{2}{5} \left(1 - \frac{\ln(V_1/V_0)}{\left(\frac{V_1}{V_0} - 1 \right)} \right)$$

c) $x = \frac{T_h}{T_c}$ $\quad \eta = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{\ln x}{x-1}\right) \longrightarrow \frac{2}{5}$ $\quad x \to \infty$ thus $T_h \to \infty$

compare to $\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_c}{T_H} \to 1 \quad T_h \to \infty$

(Part of the heat supplied in this process is at lower temp. in $A \to C$)

d)

$$\eta = \frac{-(W_{AB} + W_{CA})}{Q_{AB} - |Q_{BC}|} = \frac{\text{as b}}{\frac{5}{2} N k_B T \left(\frac{V_1}{V_0} - 1\right) - \frac{3}{2} N k_B T \left(\frac{V_1}{V_0} - 1\right)}$$

$$= \ldots = \left(1 - \frac{\ln x}{x-1}\right) \qquad x = \frac{T_H}{T_C}$$

③

a) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-i\omega(\vec{k})t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{-i\omega(\vec{k})t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$

dependence on $\vec{r} = (x, y, z)$

$= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{ik_x x} = -k_x^2 e^{ik_x x} \right] =$

$= -k_x^2 e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

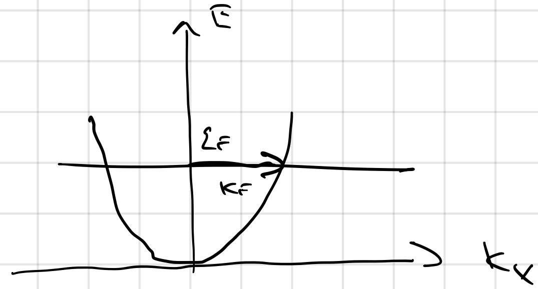
$\therefore \; -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\psi$

so $E(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$ where $k = |\vec{k}|$

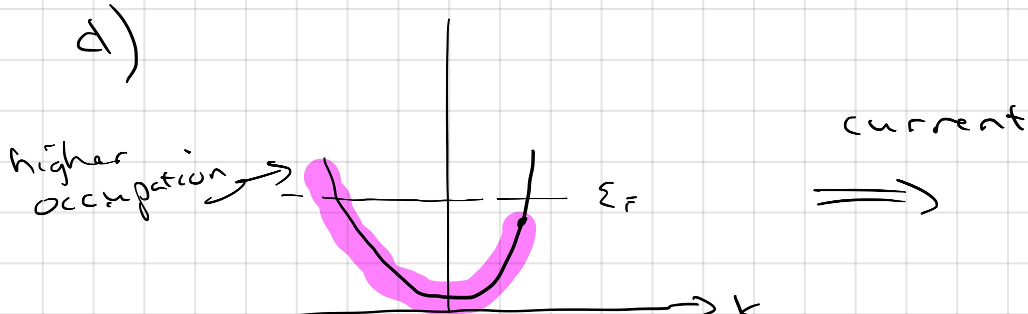
b) - No two electrons with same quantum numbers.

- lowest $|\vec{k}|$ are occupied, 2 per $\vec{k}$ (spin)

c) $E(k_x)\big|_{k_y = k_z = 0} = \frac{\hbar^2}{2m} k_x^2$



d)



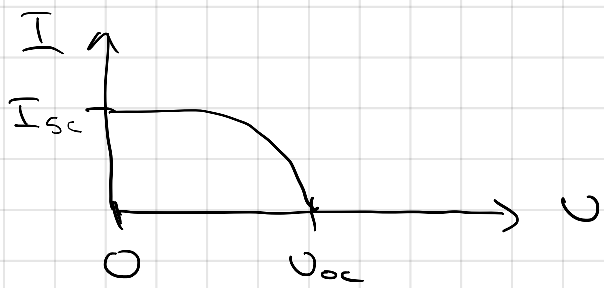
4

a) $I(U) = I_{sc} - I_0 \left(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1\right)$

I_{sc}: photoinduced current

$I_0 \left(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1\right)$: Shockley diode current, current due to drift and diffusion

b)



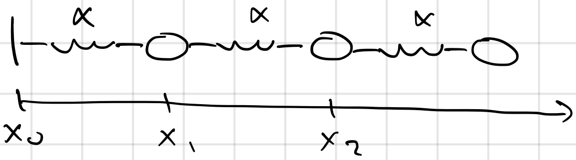
c) $\frac{I_{sc}}{I_0} = e^{\frac{eU_{oc}}{k_B T}} - 1$

$U_{oc} = \frac{k_B T}{e} \ln\left(\frac{I_{sc}}{I_0} + 1\right)$

d) $I_0 = I_{sc} / \left(e^{\frac{eU_{oc}}{k_B T}} - 1\right) \approx 8 \cdot 10^{-9}\ A$

e) $U_{oc} = \frac{k_B 300}{e} \ln\left(\frac{1}{8 \cdot 10^{-9}} + 1\right) = 0.48\ V$

(5)



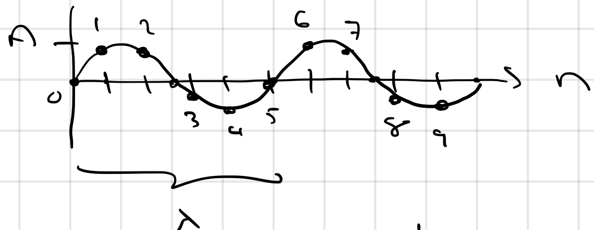
$x_0 = 0$

a) $$m\frac{d^2x_n}{dt^2} = \alpha(x_{n+1} - x_n - a) + \alpha(x_{n-1} - x_n + a)$$
$$= \alpha\left(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n\right)$$

b) $u_n(t) = A\sin(kna - \omega t)$

wavelength
$\lambda = \frac{2\pi}{k}$

not so easy to plot a discrete wave!



corresp. to constant amplitude

$kna - \omega t = \text{constant}$

$\Updownarrow$

$n = \text{const.} + \frac{\omega}{ka} t$

time increases $\Rightarrow$ n increases

c) $$m\frac{d^2u_n}{dt^2} = \alpha(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad \text{with } u_n \text{ acc. to ans. to 2}$$

$$\Rightarrow \quad -m\omega^2\sin(kna - \omega t) = \alpha\Big(\sin(kna + ka - \omega t) + \sin(kna - ka - \omega t) - 2\sin(kna - \omega t)\Big)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\therefore \quad \sin(kna - \omega t + ka) + \sin(kna - \omega t - ka) =$$
$$= 2\sin(kna - \omega t)\cos ka$$

$$\Rightarrow \quad m\omega^2 = 2\alpha(1 - \cos ka)$$
$$\therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}(1 - \cos ka)}$$

d) Otherwise it will not satisfy $x_0 = 0$.

It becomes a standing wave

$$u_n(t) \sim \sin(kna)\cos(\omega t)$$