

# ESS 100 Modellbygge och simulering

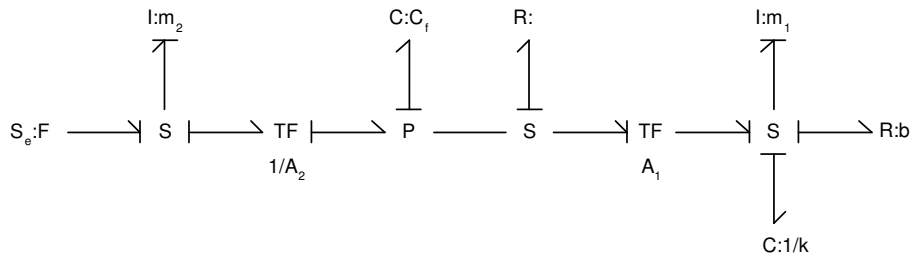
## Lösningar till tentamen tisdagen den 16 december 2003

### Uppgift 1

- (a)  $\dot{x}$  kan lösas ut med en derivering, dvs index är 1.
- (b) Simulink-modellen förutsätter en viss *kausalitet* mellan insignaler och utsignaler, medan Modelica-modellen inte gör detta.
- (c) Stor spridning i tidsskalor ger ett *styvt* system, vilket kan ge svårigheter vid simulering (bl.a. tidskrävande).
- (d) De beskrivna symptomen indikerar att störningsmodellen kan förbättras. Om syftet inkluderar att göra en bra störningsmodell, så bör det fortsatta arbetet inriktas på detta.
- (e) Komponenten består av en parallellkoppling av en fjäder och en viskös dämpare.

### Uppgift 2

a) Konfliktfri bindningsgraf:



b) Insignal:  $F(t)$

Utsignal:  $h(t)$

Tillståndsvariabler t.ex.:  $v_2$  (hastighet för  $m_2$ );  $p$  (tryck i tanken) eller  $h$  (nivå);  $v_1$  (hastighet för  $m_1$ );  $F_k$  (kraft i fjädern) eller  $x$  (läge).

c)

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{m_1}((p - \alpha A_1 v_1)A_1 - F_k - bv_1)$$

$$\dot{v}_2 = \frac{1}{m_2}(F - pA_2)$$

$$\dot{p} = \frac{1}{C_f}(A_2 v_2 - A_1 v_1)$$

$$\dot{F}_k = kv_1$$

### Uppgift 3

a) Asymptotiskt gäller

$$\text{cov}(\hat{\theta}_N - \theta_0) = \frac{\lambda}{N} \bar{R}^{-1}$$

där  $\bar{R} = E\psi(t)\psi^T(t)$  och  $\psi(t) = [u(t-1) u(t-2)]^T$ .  $\hat{\theta}_N^T = [\hat{b}_1 \hat{b}_2]^T$  och  $\theta_0^T = [b_1 b_2]^T$ .

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} R_u(0) & R_u(1) \\ R_u(1) & R_u(0) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \bar{R}^{-1} = \frac{1}{R_u^2(0) - R_u^2(1)} \begin{pmatrix} R_u(0) & -R_u(1) \\ -R_u(1) & R_u(0) \end{pmatrix}$$

$R_u(0) = \mu$ . Om  $u$  är vit så  $R_u(1) = 0$  och variansen på skattningen blir nu

$$\frac{1}{N} \lambda \bar{R}^{-1} = \frac{\lambda}{N\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vilket uppenbart är proportionellt mot brus/signalförhållandet  $\lambda/\mu$ .

b)

$$\text{var}(b_1) = \frac{\lambda}{N} \frac{R_u(0)}{R_u^2(0) - R_u^2(1)} = \frac{\lambda\mu}{N} \frac{1}{1 - (R_u(1)/\mu)^2}$$

Maximum ges för  $\mu = \mu_0$  och  $R_u(1) = 0$ . Insignalen ska alltså väljas vit.

c)

$$\text{var}(y(t) = \text{var}(b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + e(t)) = (b_1^2 + b_2^2)R_u(0) + 2b_1 b_2 R_u(1) + \lambda \leq 2\lambda \Leftrightarrow$$

$$(b_1^2 + b_2^2)R_u(0) + 2b_1 b_2 R_u(1) - \lambda \leq 0$$

Dessutom ges parameterskattningens varians i b). Låt nu

$$x = \begin{pmatrix} R_u(0) \\ R_u(1) \end{pmatrix}, \quad f(x) = \frac{\lambda}{N} \frac{x_1}{x_1^2 - x_2^2}$$

och

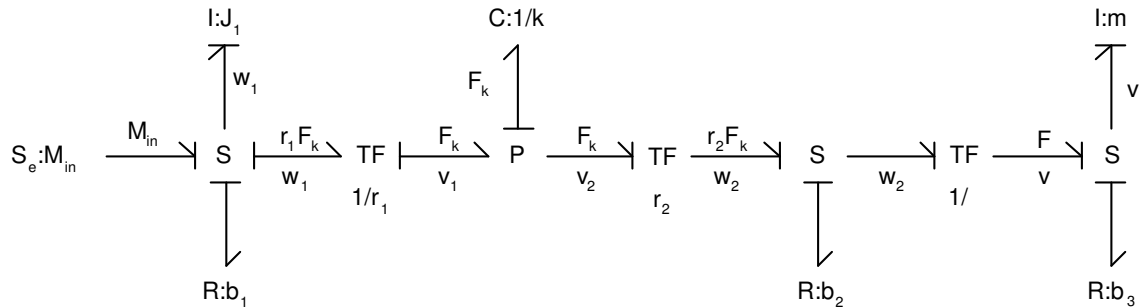
$$g(x) = \begin{cases} (b_1^2 + b_2^2)R_u(0) + 2b_1 b_2 R_u(1) - \lambda \\ |x_2| - x_1 \end{cases}$$

där det sista bivilkoret kommer från villkoret  $|R_u(1)| \leq |R_u(0)| \leq \mu_0$ .

Det är svårt att utföra denna minimering i praktiken eftersom de sanna värdena  $b_1$  och  $b_2$  är okända.

#### Uppgift 4

a) En bindningsgraf kan underlätta modelleringen:



En konfliktfri graf erhålls med  $M_{in}$  som insignal. Bindningsgrafan ger följande ekvationer:

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 &= M_{in} - b_1 \omega_1 - r_1 F_k \\ \dot{F}_k &= k(v_1 - v_2) \\ m \dot{v} &= F - b_3 v = \frac{1}{\rho} (r_2 F_k - b_2 \omega_2) - b_3 v \end{aligned}$$

Insättning av sambanden  $v_1 = r_1\omega_1$ ,  $v_2 = r_2\omega_2$  och  $\omega_2 = \frac{1}{\rho}v$  ger nu tillståndsmodellen (med  $y$  som utsignal):

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= -\frac{b_1}{J_1}\omega_1 - \frac{r_1}{J_1}F_k + \frac{1}{J_1}M_{in} \\ \dot{F}_k &= kr_1\omega_1 - \frac{kr_2}{\rho}v \\ \dot{v} &= \frac{r_2}{m\rho}F_k - \left(\frac{b_2}{m\rho^2} + b_3\right)v \\ \dot{y} &= v\end{aligned}$$

- b) Om tröghetsmomentet  $J_2$  förs in i modellen, så fås en kausalitetskonflikt i bindningsgrafan, vilket beror på den styva kopplingen mellan kugghjul och kuggstång. Möjliga åtgärder är att antingen räkna om  $J_2$  till en massa, som läggs till  $m$ , eller att inkludera en flexibilitet mellan kugghjul och kuggstång (vilket ökar modellordningen).
- c) Eftersom koefficienterna  $b_2$  och  $b_3$  förekommer i tillståndsekvationerna bara i kombinationen  $(\frac{b_2}{m\rho^2} + b_3)$ , så är det inte möjligt att bestämma båda dessa koefficienter.

## Uppgift 5

- a) Analogt med vad som händer vid cykling eller bilkörning, så är det klart att ett konstant roderutslag (skilt från noll) kommer att leda till en monotont ökande eller minskande kursvinkel — man hamnar så småningom i en cirkelformad rörelse! Anledningen är att processen har en ren integration (alternativt så kan man uppfatta roderutslaget som bestämmande för girvinkelhastigheten, dvs derivatan av kursvinkeln). Av de förslagna modellerna är det alltså  $G_1$  som verkar mest rimlig (även om  $G_3$  också kan beskriva systemet, så används här inte den fysikaliska kunskapen om processens integrator).
- b) Vid sampling av modellen  $G_1$  fås en tidsdiskret modell

$$\psi(t) = \frac{B(q)}{A(q)}\delta(t)$$

Denna modell kan skattas med en black-box-metod, t.ex. en OE-modell (additivt vitt brus läggs till utsignalen  $\psi$ ) eller en ARX-modell (som har

fördelen av enklare beräkningar). Notera att vår kunskap att modellen har en integrator inte används i dessa fall! Alternativt kan man tänka sig att använda en s.k. skräddarsydd modell, där man specificerar att processen innehåller en integrator.

- c) Eftersom störningarna uppträder på liknande sätt som roderutslaget, så är det naturligt att modifiera modellen ovan med en störning  $w$  enl. följande:

$$\psi(t) = \frac{B(q)}{A(q)}(\delta(t) + w(t))$$

Då  $w$  har starka inslag av periodiska signaler, måste man modellera även dynamiken för dessa. Detta kan motivera att man går hela vägen till den allmänna s.k. Box-Jenkins-modellen

$$\psi(t) = \frac{B(q)}{A(q)}\delta(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t)$$

där  $e(t)$  är vitt brus. Om man inte vill gå hela vägen, utan ta fasta på att störningen kommer in tidigt i processen, kan en ARMAX-modell vara en lämplig kompromiss.

- d) Prediktorn för BJ-modellen ges av

$$\hat{y}(t|\theta) = (1 - H^{-1}(q))y(t) + H^{-1}(q)G(q)u(t) = \frac{C(q) - D(q)}{C(q)}y(t) + \frac{D(q)B(q)}{C(q)A(q)}u(t)$$

Polynomen  $C(q)$  och  $A(q)$  måste vara stabila (ha nollställen innanför enhetscirkeln) för att prediktorn skall vara stabil.