

**ESS 100 Modellbygge och simulering**  
**Tentamen torsdagen den 28 augusti 2003**

M 8.45 – 12.45

Lärare: Bo Egardt, tel 3721.

**Tillåtna hjälpmedel:**

Matematisk standardtabell typ Beta.

Physics Handbook.

Valfri kalkylator, dock ej portföljdator.

Tre sidor anteckningar, dock ej lösta problem.

**Poängberäkning:** Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 50 poäng. Nominella betygsgränser är 20/30/40 poäng. Redovisningen skall vara tydlig och väl motiverad.

**Tentamensresultat:** Anslås senast den 11 september på anslagstavlan utanför studieexpeditionen. Granskning av rättningen sker den 11 september kl 12.30 – 13.00.

**OBS!**

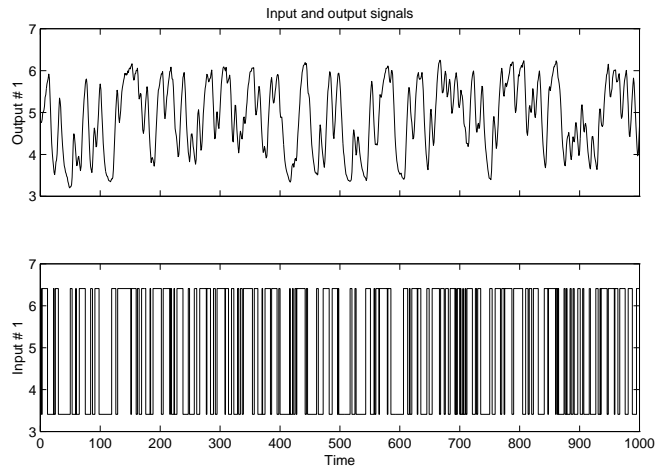
Iakttag granskningstiderna! Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste inlämnas **senast två veckor** efter granskningsdagarna.

LYCKA TILL!

## Uppgift 1

(10 p)

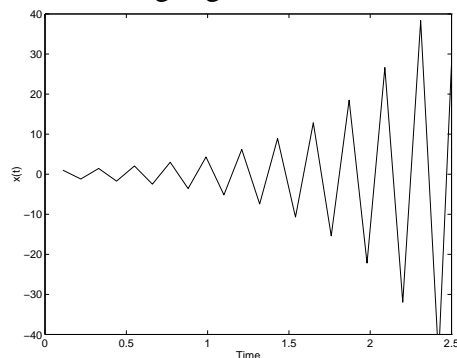
- (a) Antag att du har samlat in data enligt figuren nedan för att skatta en linjär konfektionsmodell. Vad är ditt nästa steg och varför? (2p)



- (b) Vad är skillnaden mellan ett dynamiskt och ett statiskt system? (2p)
- (c) Nämn en fördel och en nackdel med implicita numeriska metoder. (2p)
- (d) En simulering av systemet

$$\dot{x}(t) = -20x(t), x(0) = 1$$

med Eulers metod ger resultat enligt figuren nedan.



Förklara resultatet i figuren och föreslå en lämplig åtgärd. (2p)

(e) Skattning av en ARX-modell ger en modell enligt nedan

This matrix was created by the command ARX on 1/5 1997 at 10:59  
Loss fcn: 0.001563 Akaike's FPE: 0.001614 Sampling interval 1  
The polynomial coefficients and their standard deviations are

B =

0	0	0	0.0664	0.0610	0.0209
0	0	0	0.0016	0.0034	0.0043

A =

1.0000	-0.9855	0.0858	0.0439	0.0209
0	0.0452	0.0626	0.0057	0.0228

Antag att alla andra valideringsmetoder ger tillfredställande resultat. Vad blir ditt nästa steg och varför? (2p)

**Uppgift 2**

(10 p)

Antag att vi vill skatta parametrarna i modellen

$$y(t) = b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + e(t)$$

där  $e(t)$  är vitt brus, med hjälp av insamlade data.

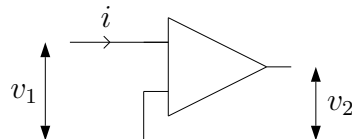
(a) Visa att variansen hos parameterskattningarna endast beror på  $R_u(0)$  och  $R_u(1)$  där  $R_u(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u^2(t)$  och  $R_u(1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t)u(t-1)$ . Vad blir variansen för  $\hat{b}_1$  då  $N \rightarrow \infty$  där  $N$  är antal insamlade data? Antag att gränsvärdena  $R_u(0)$  och  $R_u(1)$  existerar. (6p)

(b) Antag att  $R_u(0) = 1$ , dvs att variansen för insignalen är given, men att  $u(t)$  för övrigt kan väljas fritt. Hur ska  $u(t)$  väljas för att minimera variansen för  $\hat{b}_1$ ? (4p)

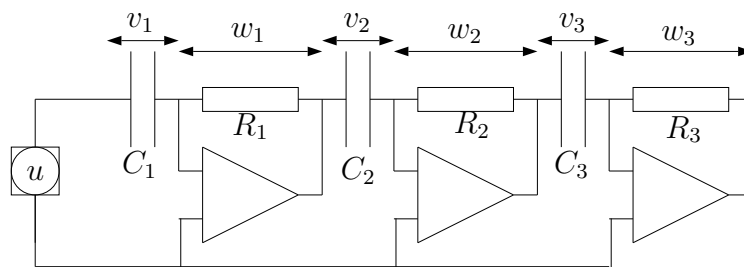
### Uppgift 3

(10 p)

Betrakta operationsförstärkaren nedan



Det gäller att  $v_2 = -Av_1$ , där  $A$  är en mycket stor förstärkning. Ofta betraktar man en ideal operationsförstärkare där  $A \rightarrow \infty$ . I det ideala fallet gäller då  $v_2 = \text{ändlig}$  och  $v_1 = 0$ . Eftersom ingångsresistansen är mycket hög kan man också räkna med värdet  $i = 0$ . Låt en koppling innehålla tre operationsförstärkare enligt nedan.



Spänningen  $u$  på den ideala spänningskällan betraktas som insignal.

- Ställ upp en DAE i variablerna  $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3$ . (4p)
- Vilket index har denna DAE? (3p)
- Vilka villkor måste initialvärdena på  $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3$  uppfylla? (3p)

#### Uppgift 4

(10 p)

(a) Betrakta systemet nedan.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -0.01 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = [1 \ 1 \ 1] x(t)$$

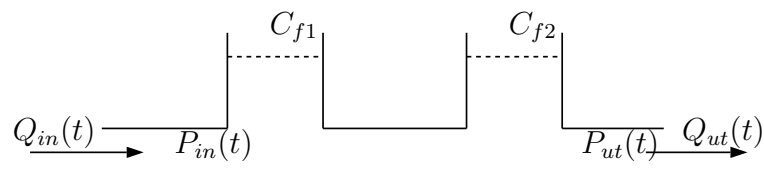
Antag att vi främst är intresserade av att kunna studera långsamma förlopp. Tag fram en approximativ 2:a ordningens modell på tillståndsform som försummar mycket snabba förlopp. (3p)

(b) Betrakta systemet nedan.

$$\dot{x}_1(t) = x_1^2(t) + x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

Linjärisera systemet kring punkten  $x_1 = x_2 = u = 0$ . (2p)

(c) Betrakta flödessystemet enligt figuren nedan.

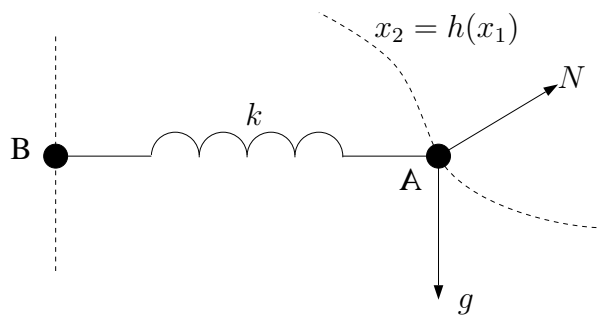


- Rita bindningsgraf för flödessystemet i figuren. Antag att  $Q_{in}(t)$  och  $Q_{ut}(t)$  är insignaler. (1p)
- Markera kausalitet i bindningsgraf. Vilken slutsats kan du dra baserad på dina kausalitetsmarkeringar? (2p)
- Ställ upp flödessystemet på tillståndsform. Hur många tillståndsvariabler behövs? (2p)

**Uppgift 5**

(10 p)

Betrakta nedanstående mekaniska system där enhetsmassan A, med horisontell koordinat  $x_1$  och vertikal koordinat  $x_2$ , glider friktionslöst längs en bana som beskrivs av sambandet  $x_2 = h(x_1)$ . I massan A är en fjäder med fjäderkonstanten  $k$  fäst. Dess andra ände, B, glider friktionslöst på en vertikal linje på så sätt att fjädern alltid är horisontell.



Massan A påverkas också av gravitationskraften  $g$  och normalkraften  $N = (N_1, N_2)^T$ . Hastigheten hos A har komponenterna  $v_1$  och  $v_2$  i horisontell respektive vertikal riktning.

1. Utnyttja ekvationen  $x_2 = h(x_1)$  för att ställa upp ett samband mellan  $N_1$  och  $N_2$ . (1p)
2. Ställ upp en DAE i variablerna  $x_1, x_2, v_1, v_2, N_1$  och  $N_2$ . Vilket index får den? (3p)
3. Ställ upp en bindningsgraf med en modulerad transformator som beskriver systemet. Markera eventuella kausalitetskonflikter. (3p)

Ledning: Ekvationen för den modulerade transformatorn fås genom att man deriverar  $x_2 = h(x_1)$  och på så sätt får ett samband mellan hastigheterna.

4. Förenkla bindningsgrafens till en graf utan kausalitetskonflikter fås. Betrakta för enkelhets skull fallet att  $x_2 = h(x_1)$  är en rät linje. Använd den förenklade grafen för att ställa upp en tillståndsmodell. (Grafen används alltså i detta fall till indexreduktion.) (3p)

Tips: Visa att nedanstående gäller och räkna ut vad  $\beta$  blir uttryckt i  $n$  och  $\alpha$ .

$$\xrightarrow{\text{TF}} \xrightarrow{n} I : \alpha \Leftrightarrow \xrightarrow{\quad} I : \beta$$

Det kan också vara användbart att transformatorer kan “dras igenom” en knutpunkt:

