ESS 100 Modellbygge och simulering
Lösningar till tentamen torsdagen den 28 augusti 2003

M 8.45 – 12.45

Uppgift 1

(a) Ta bort medelvärden eftersom en linjär konfektionsmodell förutsätter att in-, utsignaldata varierar kring 0.

(b) I ett statiskt system är sambandet mellan in- och utsignaler momentant eller direkt. I ett dynamiskat system beror utsignaler på tidigare anbringade insignaler.

(c) Implicita metoder har i allmänhet större stabilitetsområde jämfört med en explicit metod av samma noggrannhetsordning. Implicita metoder kräver dock ett mer komplicerat lösningsförfarande.

(d) Eulers metod ger differensekvationen $x_{n+1} = (1 - 20h)x_n, \; x_0 = 1$, vars lösning konvergerar om $0 \leq h < \frac{1}{10}$. I simuleringen på bilden har för stor steglängd ≈ 0.12 använts! Åtgärd: minska steglängden.

(e) Minska A-polynomets gradtal ett steg eftersom standardavvikelsen för den högsta potensens koefficient är större än koefficentents belopp. Detta är en indikation på att a_4 i själva verket skall vara noll ($0 \in \hat{a}_4 \pm std(\hat{a}_4)$).

Uppgift 2

1. Om modellen skrivs på formen $y(t) = \theta^T\varphi(t)$ där $\theta = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}^T$ och $\varphi(t) = \begin{bmatrix} u(t-1) & u(t-2) \end{bmatrix}^T$ ges variansen för parameterskattningarna av

$$E(\hat{\theta}-\theta_0)(\hat{\theta}-\theta_0)^T = \begin{bmatrix} E(\hat{b}_1 - b_1)^2 & E(\hat{b}_1 - b_1)(\hat{b}_2 - b_2) \\ E(\hat{b}_2 - b_2)(\hat{b}_1 - b_1) & E(\hat{b}_2 - b_2)^2 \end{bmatrix} \approx \frac{\lambda}{N}\bar{R}^{-1}.$$

Nu är $\bar{R} = \lim_{N\to\infty} R_N$ och

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi_N(t)\varphi_N^T(t) \\ &= \frac{1}{N}\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^N u^2(t-1) & \sum_{t=1}^N u(t-1)u(t-2) \\ \sum_{t=1}^N u(t-2)u(t-1) & \sum_{t=1}^N u^2(t-2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Alltså fås

$$\bar{R} = \lim_{N\to\infty} R_N = \begin{bmatrix} R_u(0) & R_u(1) \\ R_u(1) & R_u(0) \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\bar{R}^{-1} = \frac{1}{R_u^2(0) - R_u^2(1)}\begin{bmatrix} R_u(0) & -R_u(1) \\ -R_u(1) & R_u(0) \end{bmatrix}.$$

Detta visar att variansen för parameterskattningarna endast beror på $R_u(0)$ och $R_u(1)$. Speciellt fås variansen för $\hat{b}_1$: $\sigma_1 := E(\hat{b}_1 - b_1)^2 = \frac{\lambda}{N}\frac{R_u(0)}{R_u^2(0)-R_u^2(1)}$ och $\sigma_1 \to 0$ då $N \to \infty$.

2. Om $R_u(0) = 1$ fås $\sigma_1 = \frac{\lambda}{N}\frac{1}{1-R_u^2(1)}$ som antar sitt minsta värde för $R_u(1) = 0$. Välj alltså $u(t)$ så att $R_u(1) = 0$ uppfylls tex vitt brus.

Uppgift 3

a) Kirchhoffs spänningslag ger:

$$u = v_1 \qquad w_1 + v_2 = 0 \qquad w_2 + v_3 = 0$$

Samma ström går genom C_1 och R_1, C_2 och R_2, respektive C_3 och R_3, vilket ger:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{C_1}\int i_1 & w_1 &= R_1 i_1 \\ v_2 &= \frac{1}{C_2}\int i_2 & w_2 &= R_2 i_2 \\ v_3 &= \frac{1}{C_3}\int i_3 & w_3 &= R_3 i_3 \end{aligned}$$

Derivering och eliminering av strömmarna ger DAE:n

$$\begin{aligned} C_1\dot{v}_1 &= \frac{w_1}{R_1} & u &= v_1 \\ C_2\dot{v}_2 &= \frac{w_2}{R_2} & w_1 + v_2 &= 0 \\ C_3\dot{v}_3 &= \frac{w_3}{R_3} & w_2 + v_3 &= 0 \end{aligned}$$

b) Derivatorna av v_1, v_2 och v_3 kan direkt skrivas som funktioner av v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 och u. Derivering av ekvationerna en gång ger

$$\dot{w}_1 = -\frac{1}{R_2C_2}w_2 \qquad \dot{w}_2 = -\frac{1}{R_3C_3}w_3$$

och hjälpekvationerna

$$\dot{u} = \dot{v}_1 \qquad \dot{w}_1 + \dot{v}_2 = 0 \qquad \dot{w}_2 + \dot{v}_3 = 0$$

Därmed har vi derivatorna av w_1 och w_2 uttryckt i system variablerna. Vi behöver derivera ytterligare tre gånger för att kunna lösa ut $\dot{w}_3$. Följande ekvationer erhålls genom att derivera ovanstående

$$\dot{w}_3 = -R_3C_3\ddot{w}_2 \qquad \ddot{w}_2 = R_2C_2v_2^{(3)}$$
$$v_2^{(3)} = -w_1^{(3)} \qquad w_1^{(3)} = R_1C_1v_1^{(4)} \qquad v_1^{(4)} = u^{(4)}$$

Vilket totalt ger 4 deriveringar av relationen $v_1 = u$. Vi får nu

$$\dot{w}_3 = C_1 R_1 C_2 R_2 C_3 R_3 u^{(4)}$$

Index är alltså 4.

c) På tillståndsform:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_3C_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_2C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_3C_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_1R_1C_2R_2C_3R_3u^{(4)} \end{pmatrix}$$

Uppgift 4

1. Tillståndet x_1 har den snabbaste dynamiken ty $\tau = 10 > 0.2 > 0.01$. Om vi approximerar den första tillståndsekvationen med det statiska sambandet $0 = -10x_1 + u$ dvs $x_1 = 0.1u$ fås tillståndsbeskrivningen

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} -0.01 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + 0.1u(t),$$

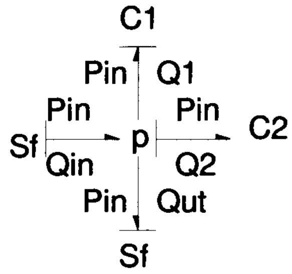
där $\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) & x_3(t) \end{bmatrix}^T$.

2. Det linjäriserade systemet ges av

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{x}_2(t)$$
$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = \tilde{u}(t)$$
$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}_1.$$

3. Bindningsgrafen i figur 1 erhålles.

Deriverande kausalitiet på ett av de flödesupplagrande elementen!



Figur 1: Bindningsgraf för uppgift 2 c).

Basekvationer:

$$
\begin{aligned}
S_f : Q_{in}, \qquad S_f : Q_{ut} \\
p : Q_{in} - Q_1 - Q_2 - Q_{ut} = 0 \\
C : C_{f_1} : P_{in} = \frac{1}{C_{f_1}} \int Q_1(s)ds \\
C : C_{f_2} : Q_2 = C_{f_2} \dot{P}_{in}
\end{aligned}
$$

Inför "tillstånden" $x_1 = P_{in}$ och $z = \dot{P}_{in}$ och insignalerna $u_1 = Q_{in}, u_2 = Q_{ut}$. Vi får $\dot{x}_1 = \dot{P}_{in} = \frac{1}{C_{f_1}} Q_1 = \frac{1}{C_{f_1}}(Q_{in} - Q_2 - Q_{ut}) = \frac{1}{C_{f_1}}(Q_{in} - C_{f_2}\dot{P}_{in} - Q_{ut}) = \frac{1}{C_{f_1}}(u_1 - C_{f_2} z - u_2)$.

Vi letar nu efter ett statiskt samband mellan z och övriga variabler. Vi har $z = \dot{P}_{in} = \frac{1}{C_{f_1}} Q1 = \frac{1}{C_{f_1}}(Q_{in} - Q_{ut} - Q_2) = \frac{1}{C_{f_1}}(Q_{in} - Q_{ut} - C_{f_2} z) \Leftrightarrow z = \frac{1}{C_{f_1} + C_{f_2}}(Q_{in} - Q_{ut})$. Hjälpvariablen z kan nu elimineras ur tillståndsekvationen.

$\dot{x}_1 = \frac{1}{C_{f_1} + C_{f_2}}(u_1 - u_2)$.

Alternativ: Slå ihop de båda flödesupplagringarna så att en konfliktfri graf erhålls. Därefter erhålls tillståndsbeskrivningen som vanligt.

Uppgift 5

a) N är vinkelrät mot kurvans lutning vilket ger $N_1 = -N_2 h'(x_1)$.

b) Newtons ekvationer

$$\begin{aligned} m\dot{v}_1 &= N_1 - kx_1 && (1)\\ m\dot{v}_2 &= N_2 - mg && (2) \end{aligned}$$

Dessutom gäller

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1 && (3)\\ \dot{x}_2 &= v_2 && (4)\\ x_2 &= h(x_1) && (5)\\ N_1 &= -N_2 h'(x_1) && (6) \end{aligned}$$

Derivering av (2),(6),(5),(1)

$$\begin{aligned} \dot{N}_2 &= m\ddot{v}_2 && (7)\\ \dot{N}_1 &= -h''(x_1)N_2\dot{x}_1 - h'(x_1)\dot{N}_2 = -h''(x_1)N_2 v_1 - h'(x_1)\dot{N}_2 && (8)\\ v_2 &= \dot{x}_2 = h'(x_1)\dot{x}_1 = h'(x_1)v_1 && (9)\\ \ddot{v}_1 &= \frac{1}{m}(\dot{N}_1 - kv_1) && (10) \end{aligned}$$

Ytterligare två deriveringar av (9) ger

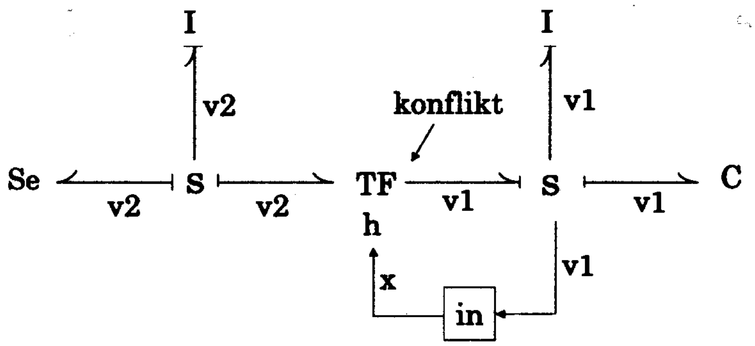
$$\dot{v}_2 = h''(x_1)v_1\dot{x}_1 + h'(x_1)\dot{v}_1 = h''(x_1)v_1^2 + h'(x_1)\dot{v}_1$$

och

$$\begin{aligned} \ddot{v}_2 = h^{(3)}(x_1)v_1^3 + h''(x_1)2v_1\dot{v}_1 + h''(x_1)\dot{v}_1 v_1 + h'(x_1)\ddot{v}_1 = \\ h^{(3)}(x_1)v_1^3 + 3h''(x_1)v_1\frac{1}{m}(N_1 - kx_1) + h'(x_1)\ddot{v}_1 \quad (11) \end{aligned}$$

Ur (7),(8),(11),(10) kan nu $\dot{N}_1$ lösas ut uttryckt i x_1, x_2, v_1, v_2, N_1, N_2. Genom att kombinera uttrycket för $\dot{N}_1$ med (8) så erhålls uttrycket för $\dot{N}_2$. Tre deriveringar medför att index är 3.

c)

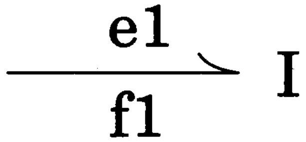


d) Först

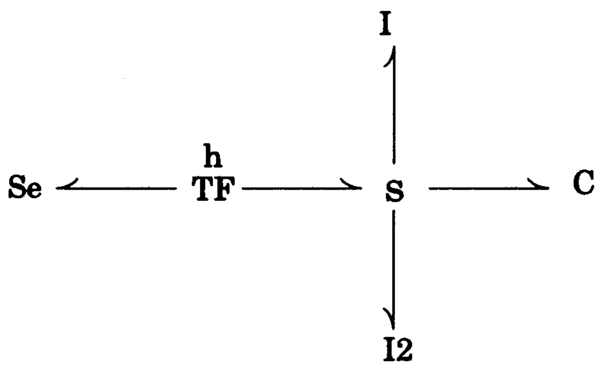
uppfyller

$$
\begin{aligned}
e_2 &= ne_1 && (12)\\
f_2 &= \frac{1}{n} f_1 && (13)\\
e_2 &= \frac{1}{\alpha}\int f_2 && (14)
\end{aligned}
$$

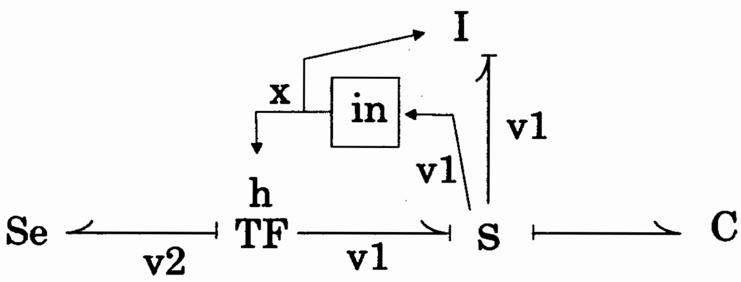
detta ger $e_1 = \frac{1}{\alpha n^2}\int f_1$ dvs



Förenkla grafen



kompletterar vi med informationspilar och kausalitet så får vi



Denna graf är konfliktfri.