CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

Institutionen för elektroteknik

ERE 103 Reglerteknik D

Tentamen 2023-01-13   14.00 – 18.00

Examinator: Bill Karlström, 0708-176535.

Tillåtna hjälpmedel:

- Typgodkänd räknare
- Beta
- Physics Handbook
- Formelsamling

Poängberäkning: Tentamen består av 6 uppgifter om totalt 30 poäng.

Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng.

Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade och sådana att tankegången i dem kan följas.!

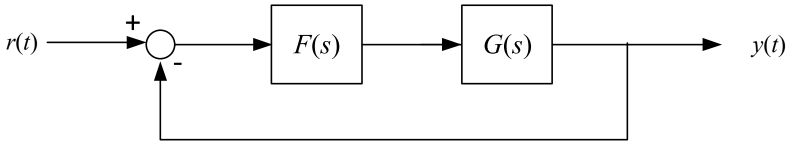
Tentamensresultat: Anges i Canvas

LYCKA TILL!

1.

Betrakta följande återkopplade system, där

$$F(s) = K \ \text{ och } \quad G(s) = \frac{2}{(1+3s)(s+4)}$$



a.	Bestäm det återkopplade systemets komplementära känslighetsfunktion $T(s)$.	1p
b.	Bestäm det återstående felet om $r(t) = 4 \cdot \sigma(t)$ då $K = 8$.	2p
c.	Låt nu $r(t) = 3 \cdot \sin 2t$. Bestäm $y(t)$ då $K = 8$, för stora t, dvs. när transienter klingat ut.	2p
d.	För vilka värden på K är det återkopplade systemet stabilt?	2p

Lösning:

$$a. \quad T(s) = \frac{L(s)}{L(s)+1} = \frac{F(s)G(s)}{F(s)G(s)+1} = \frac{\frac{2K}{(1+3s)(s+4)}}{\frac{2K}{(1+3s)(s+4)}+1} = \frac{2K}{2K+s+4+3s^2+12s} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{T(s) = \frac{2K}{3s^2+13s+2K+4}}}$$

$$b. \quad e(\infty) = y(\infty) - r(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) - 4 = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{L(s)}{L(s)+1} \cdot R(s) - 4 =$$

$$\lim_{s\to 0} s \cdot \frac{2\cdot 8}{3s^2+13s+2\cdot 8+4} \cdot \frac{4}{s} - 4 = 3{,}2 - 4 = \underline{\underline{-0{,}8}}$$

$$c. \quad G_{ry}(j\omega) = \frac{16}{20-3\omega^2+j13\omega} \quad ,\omega = 2 \ \Rightarrow \ \left|G_{ry}(j2)\right| = \frac{16}{\sqrt{(20-12)^2+26^2}} = \underline{0{,}588}$$

$$argG_{ry}(j2) = -\frac{26}{20-12} = -72{,}9° \quad \Rightarrow \quad y(t)_{stora\ t} \approx 0{,}588 \cdot 3 \cdot \sin(2t - 72{,}9°) =$$

$$= \underline{\underline{1{,}76 \cdot \sin(2t - 72{,}9°)}}$$

$$d. \quad 3s^2 + 13s + 2K + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{stabilt om } 2K+4 > 0, \text{ dvs } \underline{\underline{K > -2}}.$$

2.

a. Man vill, med ett analogt filter, filtrera bort en störning med en ungefärlig vinkelfrekvens på 8rad/s. Konstruera ett sådant filter utgående från ett enkelt första ordningens LP-filter av Butterworthtyp. Låt filtrets bandbredd vara 4rad/s. 2p

b. Konstruera ett digitalt högpassfilter med undre gränsfrekvensen 500 Hz genom att utgå från motsvarande analoga filter av Butterworth-typ av ordning 1. Använd Tustins (bilinjär) transformation och samplingsfrekvensen 10 kHz. OBS! Ingen hänsyn behöver tas till förvrängningen av frekvensskalan (frequency warping). 2 p

Lösning:

a. Låt $\omega_M = 8$ och $B = 4$. Utgå från $G(s)$ nedan och bilda ett BandSpärrfilter

$$G_{LP}(s) = \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad G_{BS} = \frac{1}{\frac{Bs}{s^2+\omega_M^2}+1} = \frac{s^2+\omega_M^2}{s^2+Bs+\omega_M^2} = \underline{\underline{\frac{s^2+64}{s^2+4s+64}}}$$

b. Utgå från filtret nedan och gör sedan följande variabelbyten

$$G_{LP}(s) = \frac{1}{s+1}, \quad s \to \frac{2\pi\cdot 500}{s} \quad \Rightarrow \quad G_{HP}(s) = \frac{1}{\frac{2\pi\cdot 500}{s}+1} = \frac{s}{s+1000\pi}$$

$$s = \frac{2}{h}\cdot\frac{z-1}{z+1} \quad \Rightarrow \quad G(z) = \frac{\frac{2}{h}\cdot\frac{z-1}{z+1}}{\frac{2}{h}\cdot\frac{z-1}{z+1}+1000\pi} = \frac{2(z-1)}{2(z-1)+h(z+1)\cdot 1000\pi} =$$

$$= \frac{2(z-1)}{2(z-1)+10^{-4}\cdot(z+1)\cdot 1000\pi} = \frac{2(z-1)}{2(z-1)+0{,}1\pi\cdot(z+1)} = \underline{\underline{\frac{2(z-1)}{2{,}314z-1{,}686}}} =$$

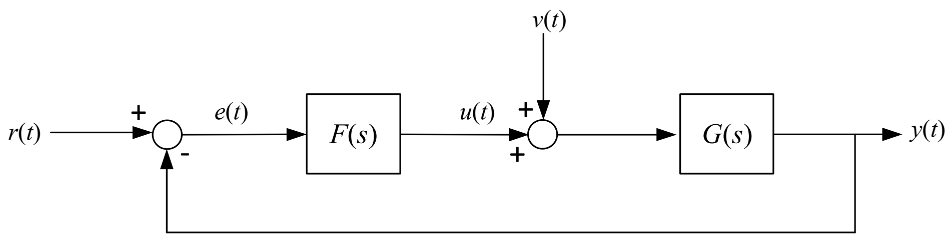
$$= \underline{\underline{0{,}8643\cdot\frac{z-1}{z-0{,}7286}}}$$

3

En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)^2}$$

återkopplas med en regulator $F(s)$ enligt figuren nedan.



a. Man önskar att kvarstående fel efter en stegstörning i $v(t)$ elimineras. Vad måste då gälla för $F(s)$? 1p

b. Bestäm överkorsningsfrekvensen ω_c enligt tumregeln $\omega_c = 0{,}4 \cdot \omega_{150}$, där $argG(j\omega_{150}) = -150°$. 1p

c. Dimensionera en regulator som uppfyller a. och b. med fasmarginalen $\varphi_m = 50°$. 3p

Lösning:

a. För att kompensera för stegstörning krävs en integration i regulatorn $F(s)$.

$$b.\quad argG(j\omega) = -90° - 2 \cdot arctan\frac{\omega}{4} = -150° \quad \Rightarrow \quad arctan\frac{\omega}{4} = 30° \quad \Rightarrow$$

$$\omega_c = 0{,}4 \cdot 4 \cdot \tan 30° = \underline{0{,}924}$$

$$c.\quad \text{Välj en PI} - \text{regulator} \quad F(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$\varphi_m = argL(j\omega_c) + 180° \quad \Rightarrow \quad argF(j\omega_c) = 50° - 180° - argG(j\omega_c) =$$

$$= -130° - \left(-90° - 2arctan\frac{0{,}924}{4}\right) = -40° + 26{,}0° = -14° \quad \Rightarrow \quad \arctan(\omega_c T_i) - 90° = -14°$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}924 \cdot T_i = \tan 76° \quad \Rightarrow \quad \underline{T_i = 4{,}34}$$

$$K_p\ ges\ av\ |L(j\omega_c)| = 1 \quad \Rightarrow \quad K_p \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{(T_i\omega_c)^2}} \cdot \frac{1}{\omega_c \cdot \sqrt{\omega_c^2 + 4^2}^2} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$K_p = \frac{\omega_c \cdot (\omega_c^2 + 16) \cdot T_i\omega_c}{\sqrt{1 + (T_i\omega_c)^2}} = \frac{0{,}924 \cdot (0{,}924^2 + 16) \cdot 4{,}34 \cdot 0{,}924}{\sqrt{1 + (4{,}34 \cdot 0{,}924)^2}} = \underline{15{,}1} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{F(s) = 15{,}1 \cdot (1 + \frac{1}{4{,}34s})}}$$

4.

En process har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{4(2-3s)}{s(s+5)^2}$$

Dimensionera en PD-regulator $F(s)$ för processen som ger en fasmarginal på 60° vid överkorsningsfrekvensen $\omega_c = 0{,}8$ rad/s. 3p

$$F(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b}$$

Lösning:

$$argG(j0{,}8) = -arctan\frac{3 \cdot 0{,}8}{2} - 90° - 2arctan\frac{0{,}8}{5} = -158{,}4°$$

$$\varphi_m = 60° \quad \Rightarrow \quad \text{fasen skall lyftas } -120° - (-158{,}4°) = 38{,}4° \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_{max} = 38{,}4° \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1 + \sin 38{,}4°}{1 - \sin 38{,}4°} = 4{,}279$$

$$\tau_d = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c} = \frac{\sqrt{4{,}279}}{0{,}8} = \underline{2{,}586}$$

$$K_p \; ges \; av \; |L(j\omega_c)| = 1 \quad \Rightarrow \quad K_p \cdot \frac{|1 + j0{,}8 \cdot 2{,}586|}{\left|1 + j0{,}8 \cdot \frac{2{,}586}{4{,}279}\right|} \cdot \frac{4|2 - 3 \cdot j0{,}8|}{0{,}8|j0{,}8 + 5|^2} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$K_p = \underline{0{,}1567} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{F(s) = 0{,}1567 \cdot \frac{1 + s \cdot 2{,}586}{1 + s \cdot 0{,}1416}}}$$

5.

Ett system beskrivs av följande differentialekvationer

$\dot{x}_1(t) = a \cdot x_2(t)$

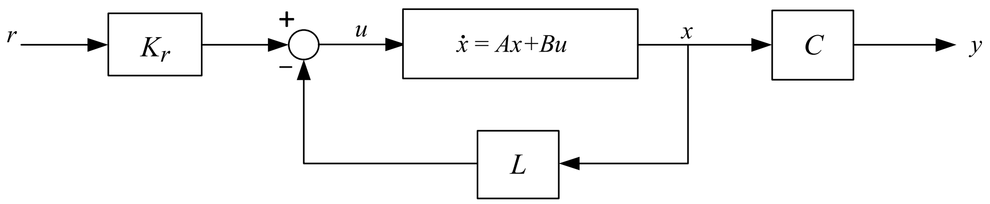
$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 4x_2(t) + 3u(t)$

där a är en konstant och $u(t)$ är styrsignalen. Utsignalen $y(t)$ ges av

$y(t) = x_1(t)$.

Systemet skall tillståndsåterkopplas enligt schemat nedan, där

$x(t) = [x_1(t) \;\; x_2(t)]^T$ är en kolonnvektor, L är en radvektor och $r(t)$ är referenssignal.



a. Bestäm återkopplingsvektorn L så att det återkopplade systemet får en dubbelpol i $s = -4$ då $a = -2$. 3p

b. Bestäm, för det L som bestämdes i a-uppgiften, förstärkningen K_r så att utsignalen stationärt blir lika med referenssignalen. 2p

c. För vilka värden på a är systemet styrbart? 1p

c. För vilka värden på a är systemet styrbart? 1p

Lösning:

a. Matrisformulering

$\dot{x} = Ax + Bu$

$u = -Lx + K_r \cdot r$, där $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $L = [l_1 \quad l_2]$

Det återkopplade systemets poler ges av $\det(sI - A + BL) = \det \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 + 3l_1 & s - 4 + 3l_2 \end{bmatrix} =$

$$= s^2 + (3l_2 - 4)s + 2 - 6l_1 = 0$$

Dubbelpol I $s = -4$ ger $(s+4)^2 = s^2 + 8s + 16 = 0 \quad \Rightarrow$

$$\underline{\underline{l_1 = -\frac{7}{3} \qquad l_2 = 4}}$$

b. Överföringsfunktionen ges av

$G(s) = K_r \cdot C(sI - A + BL)^{-1}B$

Den statiska förstärkningen $(t \to \infty)$ ges av $\lim_{s \to 0} G(s) = G(0)$.

Alltså $\quad G(0) = K_r \cdot C(-A+BL)^{-1}B = 1 \quad \Rightarrow$

$$K_r = \frac{1}{C(-A+BL)^{-1}B} = \frac{1}{[1 \quad 0] \cdot \left(-\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} [-7/3 \quad 4]\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{[1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}} = \frac{12}{[1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}} = \frac{12}{[8 \quad -2] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}} = \frac{12}{-6} = \underline{\underline{-2}}$$

c. Systemet är styrbart om $\det S \neq 0$, där $S = [AB \quad B]$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a \\ 12 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [AB \quad B] = \begin{bmatrix} 3a & 0 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det S = 9a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a \neq 0 \ \text{ för styrbarhet}}}$$

6.

En magnetisk lyftanordning kan beskrivas med följande icke-linjära differentialekvationer där u är insignal.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = g - \frac{\phi}{m} \cdot \frac{u^2}{x_1^2}$$
$$y = x_1$$

a. Bestäm jämviktsläget (x_{10}, x_{20}) $(x_{10} > 0)$ uttryckt i konstanterna u_0, g, ϕ och m 2p

b. Bestäm en linjär approximation kring jämviktspunkten (x_{10}, x_{20}, u_0) för systemet. 3p

Lösning

a. $\dot{x}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_{20} = 0}}$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad g - \frac{\phi}{m} \cdot \frac{u_0^2}{x_{10}^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{\phi}{m} \cdot \frac{u_e^2}{x_{10}^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_{10} = \sqrt{\frac{\phi}{mg}} \cdot u_0}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{u_0 = \sqrt{\frac{mg}{\phi}} \cdot x_{10}}}$$

b. Med Taylorutveckling kan högerledet i uttrycket för $\dot{x}_2$ ges en första ordningens approximation

Låt $f(x_1, u) = g - \frac{\phi}{m} \cdot \frac{u^2}{x_1^2}$

Det ger

$$f(x_1, u) \approx f(x_0, u_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]_{(x_1,u)=(x_{10},u_0)} \cdot \Delta x_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{(x_1,u)=(x_{10},u_0)} \cdot \Delta u$$

där

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]_{(x_1,u)=(x_{10},u_0)} = -\frac{\phi}{m}\cdot\frac{-2u_0^2}{x_{10}^3} = 2\frac{\phi}{m}\cdot\frac{u_0^2}{x_{10}^3} = 2\frac{\phi}{m}\cdot\frac{\left(\sqrt{\frac{mg}{\phi}}\cdot x_{10}\right)^2}{x_{10}^3} = \frac{2g}{x_{10}}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{(x_1,u)=(x_{10},u_0)} = -2\frac{\phi}{m}\cdot\frac{u_0}{x_{10}^2} = -2\frac{\phi}{m}\cdot\frac{u_0}{\frac{\phi}{mg}\cdot u_0^2} = \frac{2g}{u_0}$$

$f(x_{10},u_0) = 0$ enligt ekvationen

$\dot{x}_2 = g - \frac{\phi}{m}\cdot\frac{u^2}{x_1^2}$ (jämvikt , $\dot{x}_2 = 0$)

På så sätt kan de ursprungliga ekvationerna ges en linjär approximation enligt

$\Delta\dot{x}_1 = \alpha\Delta x_2$
$\Delta\dot{x}_2 = \beta\Delta x_1 + \gamma\Delta u$
$\Delta y = \Delta x_1$
där

$$\underline{\underline{\alpha = 1}}$$

$$\underline{\underline{\beta = \frac{2g}{x_{10}}}}$$

$$\underline{\underline{\gamma = \frac{2g}{u_0}}}$$