CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

Institutionen för elektroteknik

ERE 103 Reglerteknik D

Tentamen 2022-01-14 14.00 – 18.00

Examinator: Bill Karlström, 0708-176535.

Tillåtna hjälpmedel:

- Typgodkänd räknare
- Beta
- Formelsamling

Poängberäkning: Tentamen består av 7 uppgifter om totalt 30 poäng.

Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng.

Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Läraren besöker tentan kl 15.30

Tentamensresultat: Tid för granskning av rättningen anges på Canvas.

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

a. Ett system har överföringsfunktionen

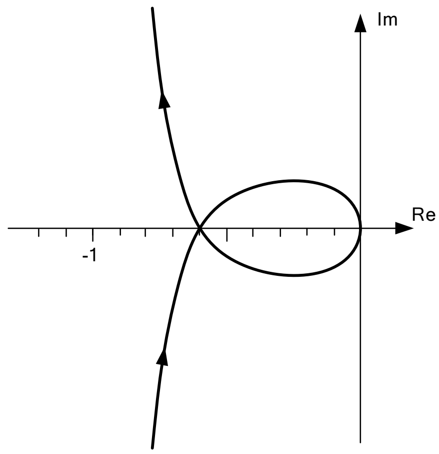
$$G(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s}.$$

Bestäm systemets poler och nollställen. 1p

b. Figuren nedan visar en del av Nyquistdiagrammet för en stabil process med en pol $s = 0$.

Processen återkopplas med en P-regulator $F(s) = K$.

Bestäm K så att amplitudmarginalen blir 2,5. 2 p



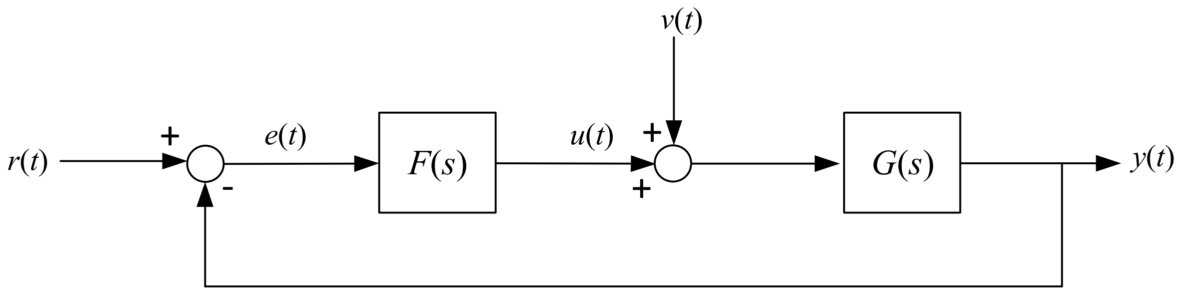
c. En process har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2 + 2s + 2}.$$

Den återkopplas med en P-regulator $F(s) = K$ där $K = 2$.

Bestäm det kvarstående felet då $v(t)$ är en stegstörning $v(t) = 10 \cdot \sigma(t)$.

(Antag $r(t) = 0$) 2p



Lösning

$a.\qquad \frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s}=\frac{s(s+1)+s(s-2)-2(s+1)(s-2)}{s(s+1)(s-2)}=$

$\frac{s^2+s+s^2-2s-2s^2+2s+4}{s(s+1)(s-2)}=\frac{s+4}{s(s+1)(s-2)}$

Nollställen: $s=-4$

Poler: $s=0,\ s=-1,\ s=2$

$b.\qquad L(j\omega)=K\cdot F(j\omega),\quad G(j\omega_\pi)=-0{,}6,$

$A_m=\frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}=\frac{1}{K\cdot|G(j\omega_\pi)|}\ \Rightarrow\quad K=\frac{1}{A_m\cdot|G(j\omega_\pi)|}=\frac{1}{2{,}5\cdot 0{,}6}=\underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

c. $\qquad Sätt\ R(s)=0\quad\Rightarrow\quad E(s)=R(s)-Y(s)=-Y(s)\quad Y(s)=G(s)\cdot\big(V(s)+F(s)\cdot E(s)\big)$

$$\Rightarrow\ E(s)=-\frac{G(s)}{1+F(s)\cdot G(s)}\cdot V(s)=-\frac{\frac{s+3}{s^2+2s+2}\cdot}{1+K\cdot\frac{s+3}{s^2+2s+2}\cdot}\cdot V(s)=$$

$$=\frac{s+3}{s^2+2s+2+K\cdot(s+3)}\cdot V(s)=\frac{s+3}{s^2+(2+K)s+2+3K}\cdot V(s)=\frac{s+3}{s^2+4s+8}\cdot V(s)$$

$$V(s)=\frac{10}{s}\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{e(\infty)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{s+3}{s^2+4s+8}\cdot\frac{10}{s}=\frac{30}{8}}}$$

Uppgift 2.

Systemet $G(s)=\frac{1}{(1+2s)^2}$ återkopplas med regulatorn $F(s)=\frac{1}{2s}$

a. Visa att det återkopplade systemet är stabilt. 1p

b. Bestäm det återkopplade systemets amplitudmarginal. 3p

Lösning

$a.\qquad L(s)=\frac{1}{2s\cdot(1+2s)^2}\qquad 1+L(s)=0\quad\Rightarrow\quad 1+\frac{1}{2s\cdot(1+2s)^2}=0\quad\Rightarrow$

$1+2s\cdot(1+2s)^2=0\quad\Rightarrow\quad 8s^3+8s^2+2s+1=0$

Routh-Hurwitz ger

s^3	8	2	0
s^2	8	1	0
s^1	c_0	c_1	
s^0	d_0	d_1	

$c_0 = \dfrac{8 \cdot 2 - 1 \cdot 8}{8} = 1 \qquad c_1 = \dfrac{8 \cdot 0 - 0 \cdot 8}{8} = 0$

$d_0 = \dfrac{1 \cdot 1 - 0 \cdot 8}{1} = 1$

<u>Första kolumnen tal är strikt positiva $\Rightarrow$ systemet stabilt.</u>

$$b. \quad A_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} \qquad L(j\omega) = \frac{1}{j2\omega \cdot (1 + j2\omega)^2} \quad \Rightarrow \quad \arg L(j\omega) = -90° - 2\arctan 2\omega$$

$$\arg L(j\omega) = -180° \ \Rightarrow \ -90° - 2\arctan 2\omega = -180° \quad \Rightarrow \quad \arctan 2\omega = 45° \ \Rightarrow \ \omega_\pi = \frac{1}{2}$$

$$L(j\omega_\pi) = \frac{1}{j2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + j2 \cdot \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{j \cdot (1+j)^2} \quad \Rightarrow \quad L(j\omega_\pi) = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A_m = 2}}$$

Uppgift 3.

Betrakta processen

$G(s) = \dfrac{2 \cdot e^{-2s}}{s+1}$ i två fall

a. Verifiera att $\omega_\pi \approx 1{,}15$ rad/s om den återkopplas med en P-regulator K_p. 1p

b. Låt nu processen återkopplas med en PI-regulator

$F(s) = K_p\left(1 + \dfrac{1}{T_i s}\right).$

Bestäm K_p och T_i så att fasmarginalen blir $\varphi_m = 45°$ då överkorsningsfrekvensen är $\omega_c = 0{,}8$ rad/s.

3p

Lösning

$$a. \ L(j\omega) = K_p \cdot G(j\omega) = K_p \cdot \frac{2 \cdot e^{-j2\omega}}{j\omega + 1} \quad \Rightarrow \quad \arg L(j\omega) = 0 - 2\omega - \arctan\omega = -2\omega - \arctan\omega$$

$$\Rightarrow \quad \arg L(j1{,}15) = -2 \cdot 1{,}15 - \arctan 1{,}15 = -2{,}3 - 0{,}855 = -3{,}155\text{rad} \approx -180°$$

Alltså $\omega_\pi \approx 1{,}15$ rad/s

$$b. \ \arg G(j\omega_c) = -2 \cdot 0{,}8 - \arctan 0{,}8 = -1{,}6 - 0{,}67 = -2{,}27\text{rad} \approx -130° \quad \Rightarrow$$

$$\arg F(j\omega_c) = \arctan \omega_c T_i - 90° = -180° + 130° + 45° = -5° \quad \Rightarrow \quad \arctan \omega_c T_i = 85° \ \Rightarrow$$

$$T_i = \frac{\tan 85°}{0{,}8} = 14{,}3$$

K_p ges av $|L(j\omega_c)| = 1 \quad \Rightarrow \quad |F(j\omega_c)| \cdot |G(j\omega_c)| = 1 \quad \Rightarrow \quad K_p \left|\dfrac{1 + j\omega_c T_i}{j\omega_c T_i}\right| \cdot \left|\dfrac{2 \cdot e^{-j2\omega_c}}{j\omega_c + 1}\right| \quad \Rightarrow$

$$K_p = \frac{\sqrt{1 + \omega_c^2} \cdot \omega_c T_i}{2\sqrt{1 + (\omega_c T_i)^2}} \approx 0{,}64 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F(s) = 0{,}64 \cdot \left(1 + \frac{1}{14{,}3s}\right)}}$$

Uppgift 4.

Ekvationerna nedan beskriver dynamiken hos ett tanksystem där tanken har tvärsnittsarean A och utflödet har tvärsnittsarean a. g är tyngdkraftsaccelerationen.
Vätskenivån ges av $x(t)$ och inflödet i tanken är $u(t)$. Utflödet ges av $y(t)$.

$$\dot{x} = -\frac{a}{A}\sqrt{2gx} + \frac{1}{A} \cdot u$$

$$y = a \cdot \sqrt{2gx}$$

a. Bestäm jämviktstillståndet (x_0 och y_0) uttryckt i a, A, g och u_0, där u_0 är inflödet vid jämvikt. 1p

b. Ange en linjär approximation kring jämviktspunkten x_0, u_0 på formen nedan genom att bestämma konstanterna α, β och γ uttryckta i a, A, g och u_0.

$$\Delta\dot{x} \approx -\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta u$$

$$\Delta y \approx \gamma \cdot \Delta x$$

där Δ anger variationer kring jämviktstillståndet. 3p

Lösning

$$a. \quad \dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{a}{A}\sqrt{2gx} + \frac{1}{A}u = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{u_0^2}{2ga^2} \qquad y_0 = a\sqrt{2g \cdot \frac{u_0^2}{2ga^2}} = u_0$$

$$b. \quad f(x,u) = -\frac{a}{A}\sqrt{2gx} + \frac{1}{A} \cdot u \qquad f(x,u) = a \cdot \sqrt{2gx} \qquad p_0 = (x_0, y_0)$$

$$\alpha = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{p_0} = \left[\frac{a}{A} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2gx}} \cdot 2g\right]_{p_0} = \underline{\underline{\frac{ga^2}{A \cdot u_0}}}$$

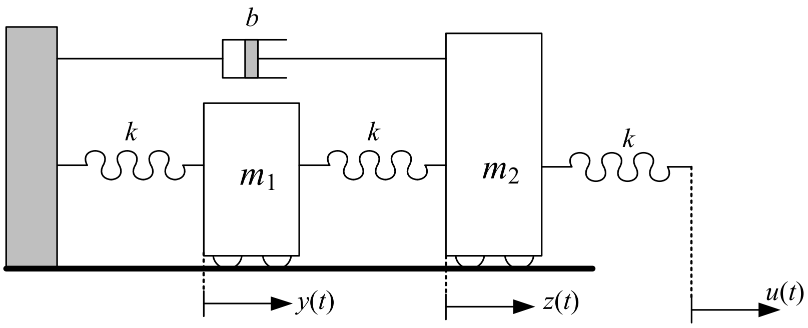
$$\beta = \left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{p_0} = \underline{\underline{\frac{1}{A}}}$$

$$\gamma = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(a\sqrt{2gx}\,\right)\right]_{p_0} = a\sqrt{2g} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{a\sqrt{2g}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2g} \cdot a}{u_0} = \underline{\underline{\frac{a^2 g}{u_0}}}$$

Uppgift 5.

Två vagnar med massorna m_1 resp. m_2 rullar friktionsfritt på ett underlag.
Fjädrarna mellan dem har fjäderkonstanten k och dämparen har dämpkonstanten b.
Låt läget $u(t)$ hos den högra fjädern vara insignal och läget $y(t)$ vara utsignal. Bestäm överföringsfunktionen

$G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$. 4p



Lösning

Vagn 1 $\quad m_1\ddot{y} = -ky + k(z-y)$

Vagn 2 $\quad m_2\ddot{z} = k(u-z) - k(z-y) - b\dot{z} \qquad \Rightarrow (Laplace)$

$$(m_1 s^2 + 2k)Y(s) = kZ(s) \quad \Rightarrow \quad Z(s) = \frac{(m_1 s^2 + 2k)}{k} Y(s)$$

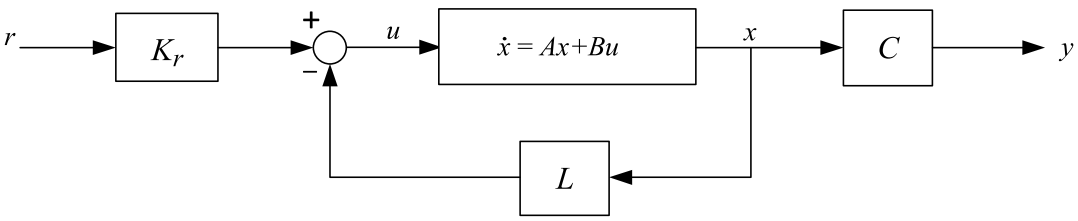
$$(m_2 s^2 + bs + 2k)Z(s) = kU(s) + kY(s) \quad \Rightarrow$$

$$(m_2 s^2 + bs + 2k)\frac{(m_1 s^2 + 2k)}{k} Y(s) = kU(s) + kY(s) \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k^2}{(m_2 s^2 + bs + 2k)(m_1 s^2 + 2k) - k^2}}}$$

Uppgift 6.

Betrakta följande tillståndsåterkopplade system:



$\dot{x}_1 = x_2 - u$

$\dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + 2u$

$y = 4x_1$ $\qquad$ r, u och y är skalärer, medan x är en vektor med två element.

a. Bestäm vektorn $L = [l_1 \;\; l_2]$ så att det återkopplade systemet får poler i -1 och -2. 3p

b. Bestäm K_r så att utsignalen y är lika med referenssignalen r för långsamma börvärdesändringar. 2p.

Lösning

$a.$ $\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx \quad där$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u = K_r r - Lx \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = Ax + B(K_r r - Lx) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = (A - BL)x + BK_r r \quad \Rightarrow$$

$$X(s)(sI - A + BL) = BK_r R(s) \quad \Rightarrow \quad X(s) = (sI - A + BL)^{-1} BK_r R(s) \quad \Rightarrow$$

$$Y(s) = C(sI - A + BL)^{-1} BK_r R(s) \quad \Rightarrow$$

$$G_{ry}(s) = C(sI - A + BL)^{-1} BK_r \quad \Rightarrow$$

Karakteristiska ekvationen $\det(sI - A + BL) = 0$

$$(sI - A + BL) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & 1 + b \\ -2 - 2a & -1 - 2b \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s - a & -1 - b \\ 2 + 2a & s + 1 + 2b \end{bmatrix}$$

$\det(sI - A + BL) = s^2 + (1 + 2b - a)s + 2 + 2b + a$

Polerna -1 och -2 ger $\det(sI - A + BL) = (s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2 \quad \Rightarrow$

$1 + 2b - a = 3$
$2 + 2b + a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = -1 \quad b = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{L = \begin{bmatrix} -1 & 0{,}5 \end{bmatrix}}}$

$$b. \quad G_{ry}(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad K_r = \frac{1}{C(-A + BL)^{-1} B}$$

$$(-A + BL)^{-1} = \left[-\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0{,}5 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \left[\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} =$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1{,}5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1{,}5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C(-A + BL)^{-1} B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1{,}5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{K_r = \frac{1}{2}}}$$

Uppgift 7.

Ett roterande system med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{3}{s^2}$$

från drivande moment till vinkeln θ skall regleras med en PD-regulator.

a) Bestäm PD-regulatorn för en godtycklig överkorsningsfrekvens ω_c och en önskad fasmarginal $\varphi_m = 45°$ 3 p

b) Ange med vilken faktor som styrsignalens känslighet för högfrekventa mätstörningar ökar då ω_c fördubblas. 1 p

Lösning

$a.\quad F(s) = K_p \dfrac{1+\tau_d s}{1+\frac{\tau_d}{b}s}$

$$\varphi_m = 45° \quad \Rightarrow \quad 45° = 180° + \arg F(j\omega_c) + \arg G(j\omega_c) \quad \Rightarrow$$

$$\arg F(j\omega_c) = -135° - \arg G(j\omega_c) = -135° - (-2\cdot 90°) = 45° \quad \Rightarrow \quad \varphi_{max} = 45°$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{1+\sin 45°}{1-\sin 45°} = \underline{\underline{5{,}828}}$$

$$\omega_c = \frac{\sqrt{b}}{\tau_d} \quad \Rightarrow \quad \tau_d = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c} = \underline{\underline{\frac{2{,}41}{\omega_c}}}$$

$$L(j\omega) = K_p \frac{1+\tau_d j\omega}{1+\frac{\tau_d}{b}j\omega}\cdot\frac{3}{(j\omega)^2} \qquad |L(j\omega_c)| = 1 \quad \Rightarrow \quad K_p \frac{\left|1+j\omega_c\cdot\frac{\sqrt{b}}{\omega_c}\right|}{\left|1+j\omega_c\cdot\frac{\frac{\sqrt{b}}{\omega_c}}{b}\right|}\cdot\frac{3}{{\omega_c}^2} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$K_p \frac{\sqrt{1+b}}{\sqrt{1+\frac{1}{b}}}\cdot\frac{3}{{\omega_c}^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad K_p \frac{\sqrt{1+b}}{\sqrt{\frac{b+1}{b}}}\cdot\frac{3}{{\omega_c}^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3\sqrt{b}\cdot K_p}{{\omega_c}^2} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$K_p = \frac{{\omega_c}^2}{3\sqrt{b}} = \underline{\underline{\frac{{\omega_c}^2}{7{,}24}}}$$

$$F_{PD}(s) = \frac{{\omega_c}^2}{7{,}24}\cdot\frac{1+\frac{2{,}41}{\omega_c}s}{1+\frac{2{,}41}{5{,}828\omega_c}s} = \underline{\underline{\frac{{\omega_c}^2}{7{,}24}\cdot\frac{1+\frac{2{,}41}{\omega_c}s}{1+\frac{0{,}414}{\omega_c}s}}}$$

$b.\quad G_{ru}(j\omega) = \dfrac{F(j\omega)}{1+F(j\omega)G(j\omega)} \quad \rightarrow \quad F(j\omega) \quad då \quad \omega\rightarrow\infty \quad \Rightarrow$

$$G_{ru}(j\omega) \quad \rightarrow \quad \frac{{\omega_c}^2}{7{,}24}\cdot\frac{2{,}41}{0{,}414} \quad då \quad \omega\rightarrow\infty \quad \Rightarrow$$

<u>G_{ru} blir 4 gånger så stor vid höga frekvenser om ω_c fördubblas.</u>