CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

Institutionen för elektroteknik

ERE 103 Reglerteknik D

Tentamen 2021-04-07 14.00 – 18.00

Examinator: Bill Karlström, 0708-176535.

Tillåtna hjälpmedel: Alla omänskliga, källor skall anges.

Poängberäkning: Tentamen består av 9 uppgifter om totalt 30 poäng.

Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng.

Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade och sådana att tankegången i dem kan följas.!

Tentamensresultat: Anges i Canvas

LYCKA TILL!

1.

a. Ett linjärt system har stegsvaret $y(t) = 1 - (1 + at) \cdot e^{-at}$, ≥ 0.

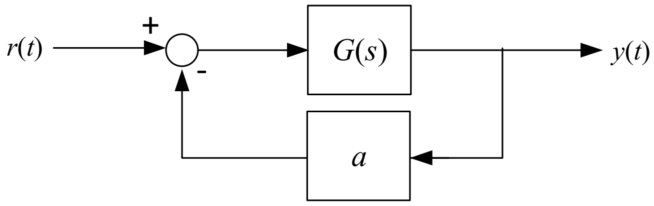
Bestäm systemets överföringsfunktion 2p

b. Bestäm impulsfunktionssvaret för systemet i a-uppgiften. 2p

c. Ett linjärt system har impulsfunktionsvaret $(t) = e^{-0,1t} \cdot (1 + 0,3 \cdot \cos 0,2t)$.

Bestäm dess statiska förstärkning. 2p

d. Ett linjärt system $G(s)$ med förstärkningen K och tidskonstanten T återkopplas enligt schemat nedan.
Bestäm tidskonstanten för överföringsfunktionen från r till y. 1p



Lösning

1a.

$$Stegsvar \quad y(t) = 1 - e^{-a} \; - at \cdot e^{-at}$$

Laplace ger

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} - \frac{a}{(s+a)^2} = \frac{(s+a)^2 - s(s+a) - as}{s(s+a)^2} = \frac{a^2}{s(s+a)^2}$$

$$(s) = \frac{Y(s)}{1/s)} = \underline{\frac{a^2}{(s+a)^2}}$$

1b. $G(s)$ = Laplacetransformen av impulssvaret.

$$G(s) = \frac{a^2}{(s+a)^2} \quad \Rightarrow \quad impulssvaret \quad \underline{g(t) = a^2 t \cdot e^{-at}}$$

1c.

$$g(t) = e^{-0,1t} \cdot (1 + 0,3 \cdot \cos 0,2t) = e^{-0,1t} + 0,3 \cdot e^{-0,1t} \cdot \cos 0,2t$$

Laplacetransformering ger

$$G(s) = \frac{1}{s+0,1} + 0,3 \cdot \frac{s+0,1}{(s+0,1)^2 + 0,2^2} \quad \Rightarrow \quad G(0) = \frac{1}{0,1} + 0,3 \cdot \frac{0,1}{(0,1)^2 + 0,2^2} = \underline{10,6}$$

1d.

$$G(s) = \frac{K}{1+sT} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+a\cdot G(s)} = \frac{\frac{K}{1+sT}}{1+a\cdot\frac{K}{1+sT}} = \frac{K}{1+sT+a\cdot K} = \frac{\frac{K}{1+a\cdot K}}{1+s\frac{T}{1+a\cdot K}} \qquad \Rightarrow$$

Det återkopplade systemet har tidskonstanten blir

$$\underline{\frac{T}{1+a\cdot K}}$$

2.

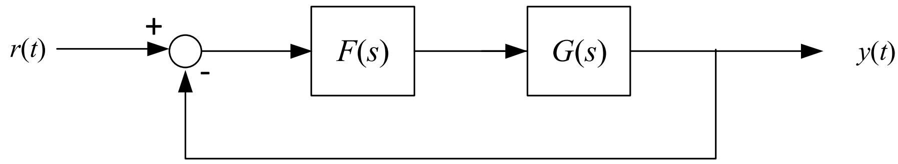
Betrakta det återkopplade systemet nedan där

$$G(s) = \frac{2}{s(s+6)}$$

$F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$ är en PI − regulator.

Dimensionera PI–regulatorn så att det återkopplade systemet

får en trippelpol i $s = -2$. 2p



Lösning

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{F(s)\cdot G(s)}{1+F(s)\cdot G(s)} = \frac{\left(K_p+\frac{K_i}{s}\right)\cdot\frac{2}{s(s+6)}}{1+\left(K_p+\frac{K_i}{s}\right)\cdot\frac{2}{s(s+6)}} = \frac{\left(K_p+\frac{K_i}{s}\right)\cdot 2}{s(s+6)+2\left(K_p+\frac{K_i}{s}\right)} =$$

$$= \frac{2(K_p s + K_i)}{s^2(s+6)+2(K_p s+K_i)} = \frac{2(K_p s+K_i)}{s^3+6s^2+2K_p s+2K_i}$$

Trippelpol i $s = -2$ ger att nämnaren skall vara

$$s^3 + 3\cdot 2\cdot s^2 + 3\cdot 2^2\cdot s + 2^3 = s^3 + 6\cdot s^2 + 12\cdot s + 8$$

Identifiering av koefficienter ger

$$\underline{K_p = 6 \qquad K_i = 4}$$

3.

Ett system har följande överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{3e^{-s}}{4s + 3e^{-s}}$$

a. Visa att systemet är stabilt. 2p

Lösning

$$G(s) = \frac{\frac{3}{4s}e^{-s}}{1 + \underbrace{\frac{3}{4s}e^{-s}}_{L(s)}}$$

Låt ω_π vara den frekvens för vilken $(j\omega)$ skär den negativa realaxeln i s −planet.

$$\arg\ L(j\omega_\pi) = -\omega_\pi \cdot \frac{180°}{\pi} - 90° = -180° \qquad \Rightarrow \qquad \omega_\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$|L(j\omega_\pi)| = \frac{3}{4 \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2\pi} < 1$$

Stabilt enligt det förenklade Nyquist-kriteriet.

b. Bestäm systemet stationära utsignal $y(t)$ då dess insignal är $r(t) = 2\sin(\pi t + 43°)$. 2p

Lösning

$$y(t) = |G(j\pi)| \cdot 2 \cdot \sin(\pi t + 43° + argG(j\pi))$$

$$|G(j\pi)| = \frac{3}{|j4\pi + 3\cos\pi - 3j\sin\pi|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (4\pi)^2}} = 0{,}232$$

$$argG(j\pi) = -180° - arctan\frac{4\pi - 3\sin\pi}{3\cos\pi} = -180° + arctan\frac{4\pi}{3} = -103{,}4°$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y(t) = 0{,}232 \cdot 2 \cdot \sin(\pi t - 60{,}4°)}$$

4.

Blockschemat nedan visar ett reglersystem innehållande en process och en P-regulator $F(s) = K$.

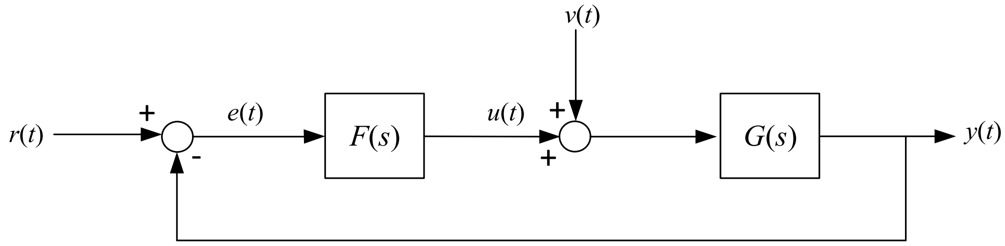
Processen ges av $G(s) = \dfrac{1}{(s+2)^2}$

Processen påverkas av en sinusformad störning $v(t)$ med vinkelfrekvensen 1,5rad/s och amplituden 3,0.

a. Beräkna amplituden för den sinusformade komponenten i utsignalen då ingen återkoppling används ($K = 0$). 1p

b. Bestäm P-regulatorns förstärkning K så att fasmarginalen blir $40°$. 2p

c. Hur stor blir, med detta K-värde, amplituden hos den sinusformade komponenten i utsignalen? 2p



Lösning

a. Amplituden blir

$$A = 3{,}0 \cdot |G(j\omega)| = \frac{3}{|2 + j1{,}5|^2} = \underline{0{,}48}$$

b. Fasmarginalen 40° ges av $\varphi_m = 180° - argKG(i\omega_c)$, så att

$argKG(i\omega_c) = -2arctan\omega_c = -140°$, vilket ger $\omega_c = \tan 70° = 2{,}747$

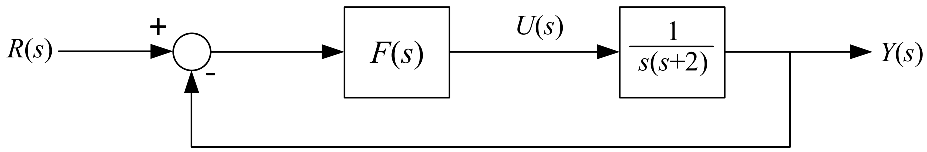
Detta ger K enligt

$$|KG(\omega_c)| = 1 \qquad K = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} = |2 + j\omega_c|^2 = |2 + j2{,}747|^2 = \underline{11{,}55}$$

5.

Betrakta det återkopplade systemet nedan, där $F(s)$ är en PI-regulator enligt

$$F(s) = K \cdot T + \frac{K}{s}$$



a. För vilka värden på K och T är det återkopplade systemet stabilt? 2p

Lösning

Den karakteristiska ekvationen ges av $1 + L(s) = 0$, dvs

$$1 + \frac{1}{s(s+2)} \cdot \frac{KTs + K}{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^3 + 2s^2 + sKT + K = 0$$

Routh-H ger

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & KT \\ s^2 & 2 & K \\ s^1 & c_0 & 0 \\ s^0 & d_0 & \end{array}$$

$$c_0 = \frac{2KT - K}{2} = \frac{K(2T - 1)}{2}$$

Enligt Routh-H:s kriterium är systemet stabilt om $\underline{K > 0,\ T > 0{,}5}$

b. Visa att $\max\limits_{\omega_c} \varphi_m = arctan\dfrac{\sqrt{2}\cdot(2T-1)}{4\sqrt{T}}$ 3p

Lösning

$$\varphi_m = 180° - 90° - arctan\frac{\omega_c}{2} - 90° + arctan\omega_c T = arctan\omega_c T - arctan\frac{\omega_c}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_m = arctan\frac{\omega_c T - \frac{\omega_c}{2}}{1 + \frac{\omega_c^2 T}{2}} = arctan\frac{\omega_c(2T-1)}{2 + \omega_c^2 T} = arctanQ$$

φ_m har max när argumentet Q för arctan har max. Alltså då

$$\frac{dQ}{d\omega_c} = 0$$

Derivering ger då

$$\frac{dQ}{d\omega_c} = \frac{(2T-1)(2+\omega_c^2 T) - 2\omega_c T\cdot\omega_c(2T-1)}{(\quad)^2} = \frac{(2T-1)(2-\omega_c^2 T)}{(\quad)^2} = 0$$

Max φ_m erhålles då

$$\omega_c = \sqrt{\frac{2}{T}}$$

Det ger

$$\varphi_{mMAX} = arctan\frac{\sqrt{\frac{2}{T}}\cdot(2T-1)}{2 + \frac{2}{T}T} = arctan\frac{\sqrt{2}\cdot(2T-1)}{4\sqrt{T}} \qquad V.S.V$$

c. Bestäm K och T så att $\max\limits_{\omega_c} \varphi_m = 45°$. 2p

Lösning

$$\frac{\sqrt{2}\cdot(2T-1)}{4\sqrt{T}} = \tan 45° = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}\cdot(2T-1) = 4\sqrt{T} \quad \Rightarrow \quad 2\,(2T-1)^2 = 16T \quad \Rightarrow$$

$$4T^2 - 4T + 1 = 8T \quad \Rightarrow \quad T^2 - 3t + 0{,}25 = 0 \qquad T = \begin{cases} 1{,}5 + \sqrt{2} \\ 1{,}5 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Men enligt a-uppgiften skall $T > 0{,}5$, därför gäller

$$T \underline{= 1{,}5 + \sqrt{2} \approx 2{,}914}$$

b.

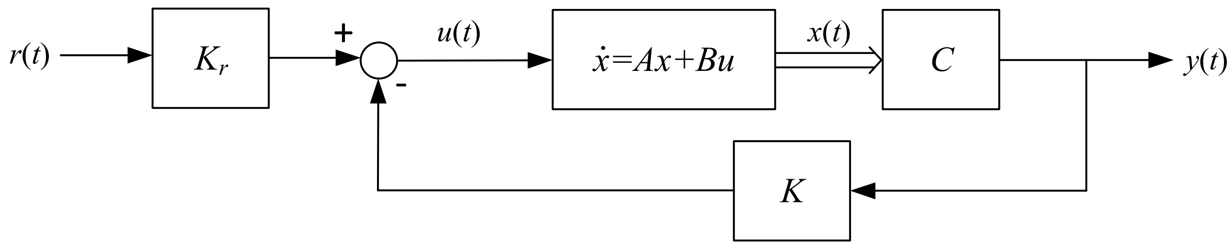
$$L(j\omega_c) = 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{j\omega_c(j\omega_c+2)}\right| \cdot \left|\frac{K(j\omega_c T + 1)}{j\omega_c}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{K\cdot\sqrt{1+\omega_c^2 T^2}}{\omega_c^2\cdot\sqrt{4+\omega_c^2}} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$K = \frac{\omega_c^2\cdot\sqrt{4+\omega_c^2}}{\sqrt{1+\omega_c^2 T^2}} = \frac{\frac{2}{T}\sqrt{4+\frac{2}{T}}}{\sqrt{1+\frac{2}{T}T^2}} = \frac{\frac{2}{T}\sqrt{4+\frac{2}{T}}}{\sqrt{1+2T}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{T\sqrt{T}}\sqrt{2T+1}}{\sqrt{1+2T}} = \underline{\frac{2}{T}\cdot\sqrt{\frac{2}{T}}}$$

6.

Schemat nedan visar ett återkopplat system där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$



a. För vilka värden på K är systemet stabilt? 3p

Lösning

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -2 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 4s + 6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+4 & 2 \\ -3 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2 + 4s + 6} \begin{bmatrix} s+4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{4}{s^2 + 4s + 6}$$

Den karakteristiska ekvationen $1 + KG(s) = 0$ blir

$$1 + \frac{4K}{s^2 + 4s + 6} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + 4s + 6 + 4K = 0 \quad \Rightarrow$$

Systemet är stabilt om $6 + 4K > 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{K > -1{,}5}$

b. Låt $r(t)$ vara ett enhetssteg. Bestäm K_r så att $\lim_{t \to \infty} y(t) = 1$ under förutsättning att K stabiliserar systemet. 2p

Lösning

$$Y(s) = K_r \cdot \frac{G(s)}{1 + KG(s)} = K_r \cdot \frac{\dfrac{4}{s^2 + 4s + 6}}{1 + \dfrac{4K}{s^2 + 4s + 6}} = \frac{4K_r}{s^2 + 4s + 6 + 4K}$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{4K_r}{s^2 + 4s + 6 + 4K} \cdot \frac{1}{s} = \frac{4K_r}{6 + 4K} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{K_r = \frac{6 + 4K}{4}}$$