CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

Institutionen för elektroteknik

ERE 103 Reglerteknik D

Tentamen 2021-01-15 14.00 – 18.00

Examinator: Bill Karlström, 0708-176535.

Tillåtna hjälpmedel: Alla omänskliga, källor skall anges.

Poängberäkning: Tentamen består av 9 uppgifter om totalt 30 poäng.

Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng.

Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade och sådana att tankegången i dem kan följas.!

Tentamensresultat: Anges i Canvas

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

a. Sambandet mellan insignalen u och utsignalen y för ett dynamiskt system ges av differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 3u(t-2)$$

Låt insignalen vara $u(t) = \sin \omega t$. Bestäm $y(t)$ för stora $(t \to \infty)$.

2p

b. Ett andra ordningens system beskrivs av

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = u(t).$$

Det återkopplas med en P-regulator $(t) = K \cdot (r(t) - y(t))$, där $r(t)$ är börvärdet.

För vilka värden på K kommer $y(t)$ att vara begränsad då $r(t)$ är begränsad? 2p

c. Bestäm impulssvaret för den process som har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{2s^2 + 4s + 3}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)}.$$ 2p

Lösning

a. Laplacetransformering ger (med initialvillkoren = 0)

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 3e^{-2s}U(s),$$

vilket ger

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3e^{-2s}}{s^2 + 3s + 2} = \frac{3e^{-2s}}{(s+1)(s+2)}$$

Eftersom $G(s)$ är stabil ges utsignalen för stora t av

$y(t) = |G(i\omega)| \cdot \sin\big(\omega t + \arg G(i\omega)\big)$, där

$$|G(i\omega)| = \frac{3}{\sqrt{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}}$$

$$\arg G(i\omega) = -2\omega - \arctan\omega - \arctan\frac{\omega}{2}$$

b. Laplacetransformering ger $G(s) = s(s+3)$, vilket ger kretsöverföringen

$$L(s) = \frac{K}{s(s+3)}$$

Det återkopplade systemet får då överföringsfunktionen

$$\frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K}{s^2 + 3s + K}$$

Detta ger polerna

$s = -1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - K}$, vilket ger vilkoret > 0 för stabilitet.

c. Partialbråksuppdelning ger

$$G(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{s^2+2s+2} = \frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1},$$

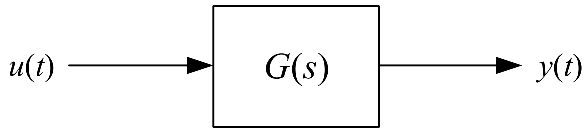
Vilket med tabell ger

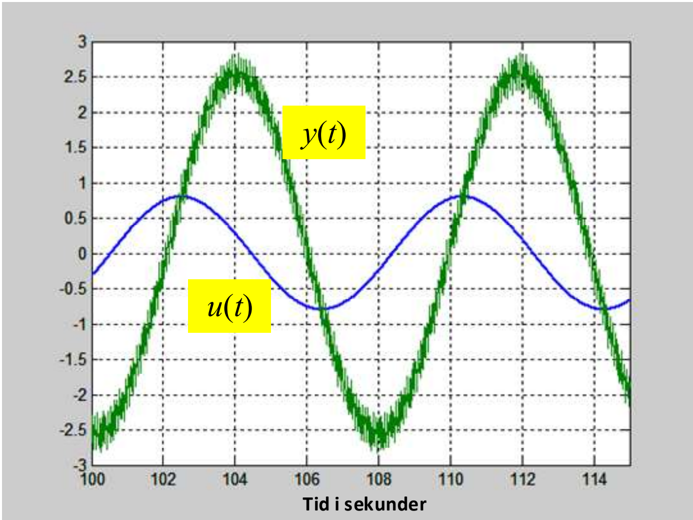
$$g(t) = e^{-t}(1+\cos t)$$

Uppgift 2.

I diagrammet nedan t.h. ses resultatet av en frekvensanalys på en process som kan ses som ett första ordningens system utan dödtid.
Insignalen $u(t)$ är en ren sinussignal. Utsignalen $y(t)$ är behäftad med mätbrus.

Bestäm systemets förstärkning och tidskonstant. 3p





Lösning

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT}$$

$$G(i\omega) = \frac{K}{1 + i\omega T}$$

Avläsning i diagrammet ger

$$\omega = \frac{2\pi}{112 - 104} = \frac{\pi}{4}$$

$$\hat{u} = 0{,}8 \qquad \hat{y} = 2{,}5 \qquad \varphi = -\frac{104 - 102{,}5}{8} \cdot 360° = -67{,}5°$$

$$G\left(i \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \frac{K}{1 + i \cdot \frac{\pi}{4} T} \quad \Rightarrow \quad \left|G\left(i \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 T^2}} \qquad \arg G\left(i \cdot \frac{\pi}{4}\right) = -\arctan\left(\frac{\pi}{4} T\right)$$

Alltså

$$\frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 T^2}} = \frac{2{,}5}{0{,}8} = 0{,}3125 \qquad -\arctan\left(\frac{\pi}{4} T\right) = -67{,}5° \quad \Rightarrow \quad \underline{T = 1{,}5}$$

$$\frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 1{,}5^2}} = 0{,}3125 \quad \Rightarrow \quad \underline{K = 0{,}483}$$

$$\underline{G(s) = \frac{0{,}483}{1 + s \cdot 1{,}5}}$$

Uppgift 3.

a Ett återkopplat system är stabilt och har dessutom en stabil kretsöverföring.
Antag att känslighetsfunktionen $S(i\omega)$ uppfyller följande krav:

$|S(i\omega)| \leq 2.$

Vilken amplitudmarginal garanterar detta? 3p

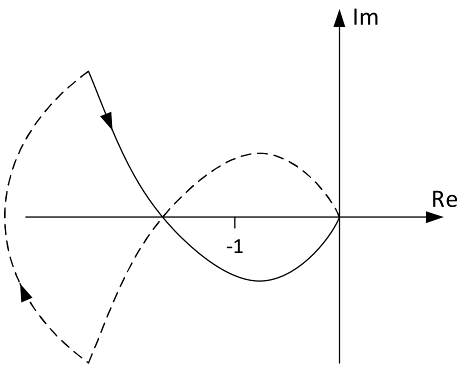
Lösning

Nyquists förenklade stabilitetskriterium gäller eftersom $L(s)$ är stabil. Alltså passerar $L(i\omega)$ till höger om den kritiska punkten $(-1, 0)$. Känslighetsfunktionen ges av $S(s) = 1/(1 + L(s))$, där $L(s)$ är kretsöverföringen, vilket ger $|S(i\omega)| \leq 2 \Leftrightarrow |1 + L(i\omega)| \geq 1/2$ dvs avståndet från $L(i\omega)$ till punkten -1 är större än 0.5. Alltså korsar kurvan negativa realaxeln till höger om punkten $(-0.5, 0)$, vilket innebär att amplitudmarginalen uppfyller $Am \geq 2$.

b. Ett enkelt återkopplat system har kretsöverföringen

$$L(s) = \frac{s+a}{s(s+b)}, \quad a > 0, \quad b < 0$$

Nedan ses avbildningen av $L(s)$ då s följer Nyquists kontur medurs.



Är det slutna systemet stabilt? 2 p

Lösning

Antalet instabila poler ges av $= P + N$, där P är antalet instabila poler hos det öppna systemet. Här är $P = 1$, eftersom $b < 0$. N är antalet varv som kurvan för $L(s)$ omsluter punkten -1 medurs. Här omsluts -1 en gång moturs, vilket ger $N = -1$.

Alltså $= 1 + (-1) = 0$.

Det slutna systemet är alltså stabilt.

Uppgift 4.

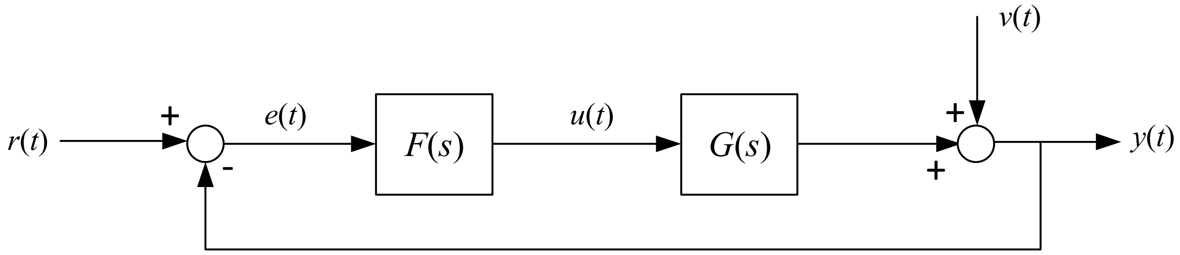
En process har överföringsfunktionen

$G(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}.$

Den återkopplas med en P-regulator $F(s) = K$ där $K = 2$.

Bestäm det kvarstående felet då $v(t)$ är en stegstörning $v(t) = 10 \cdot \sigma(t)$.

(Antag $r(t) = 0$) 2p



Lösning

$E(s) = 0 - Y(s)$

$Y(s) = V(s) + F(s)G(s)E(s) \qquad \Rightarrow$

$E(s) = -V(s) - F(s)G(s)E(s)$, så att

$$E(s) = -\frac{V(s)}{1+F(s)G(s)} = -\frac{V(s)}{1+2G(s)}$$

Låt nu $(t) = 10 \cdot \sigma(t)$. Det ger

$$V(s) = \frac{10}{s}$$

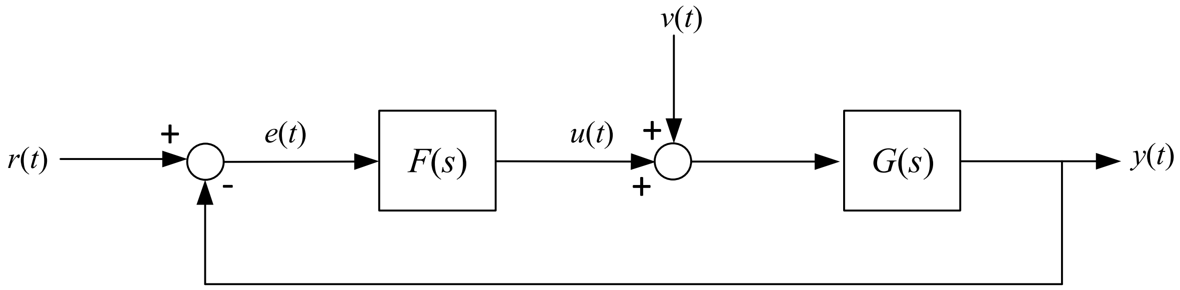
Slutvärdessatsen ger nu

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = -\lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+2G(s)} \cdot \frac{10}{s} = -\frac{10}{1+2G(0)} = -\frac{10}{1+2\cdot 2} = -2$$

Uppgift 5.

En process har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s(s+8)^2}$$



Kraven på reglersystemet är att eliminera kvarstående fel vid en stegformad störning samt att fasmarginalen skall vara $\varphi_m = 50°$.

Dimensionera en regulator som uppfyller kraven. Välj överkorsningfrekvensen $\omega_c = 0{,}4 \cdot \omega_{150}$,

där $\arg G(i\omega_{150}) = -150°$. 3p

Lösning

Det måste vara en PI-regulator för att kvarstående fel skall vara noll, så att

$$F(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

Överkorsningsfrekvensen ges av

$$G(i\omega_{150}) = -90° - \frac{2\arctan\omega_{150}}{8} = -150°$$

Det ger $\omega_{150} = 8\tan 30° \approx 4{,}6\text{rad/s}$ och $\omega_c = 1{,}85\text{rad/s}$

$\arg G(i\omega_c) = -116°$ ger att PI-regulatorn kan tillåtas att sänka fasen med 14° (180-116-50).

Det ger

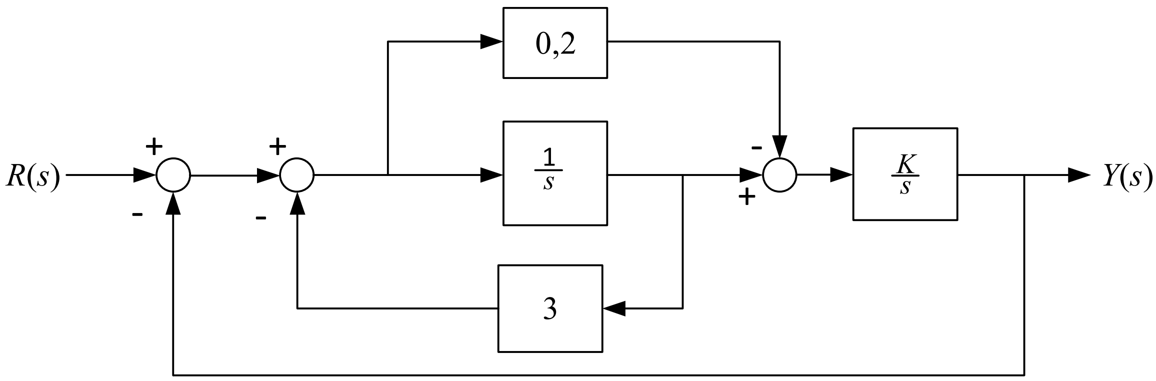
$\arg F(i\omega_c) = \arctan(\omega_c T_i) - 90° = -14°$, vilket ger $T_i \approx 2{,}17$.

Slutligen ger villkoret $|(i\omega_c| \cdot |G(i\omega_c| = 1$ att K_p kan väljas som

$$K_p = \frac{\omega_c(\omega_c^2 + 8^2)}{\sqrt{1 + (T_i\omega_c)^2}} \approx 121$$

Uppgift 6.

För vilka värden på K är följande system stabilt? 2p



Lösning

Förenkla det block som innehåller den inre återkopplingen och framkopplingen

$$\frac{1/s}{1+3/s} - 0{,}2\frac{1}{1+3/s} = \frac{1-0{,}2s}{s+3}$$

Detta ger för hela systemet

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1-0{,}2s}{s+3}\cdot\frac{K}{s}}{1+\frac{1-0{,}2s}{s+3}\cdot\frac{K}{s}} = \frac{K(1-0{,}2s)}{s(s+3)+K(1-0{,}2s)} = \frac{K(1-0{,}2s)}{s^2+(3-0{,}2K)s+K}$$

För stabilitet krävs i ett polynom av grad 2 att koefficienterna skall vara positiva, dvs

$K > 0 \qquad 3 - 0{,}2K > 0 \quad \Rightarrow \quad K < 15$, så att $\quad 0 < K < 15$

Uppgift 7.

Ett system beskrivs av följande differentialekvationer

$\dot{x}_1(t) = -3x_2(t) - 4x_1(t) + u(t)$
$\dot{x}_2(t) = x_1(t)$

$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$

Systemet återkopplas med styrlagen $u(t) = r(t) - 2x_1(t) - 6x_2(t)$, där $r(t)$ är en referenssignal.

Bestäm det slutna systemets poler. 2p

Lösning

På matrisform fås

$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

Detta ger för det återkopplade systemet att

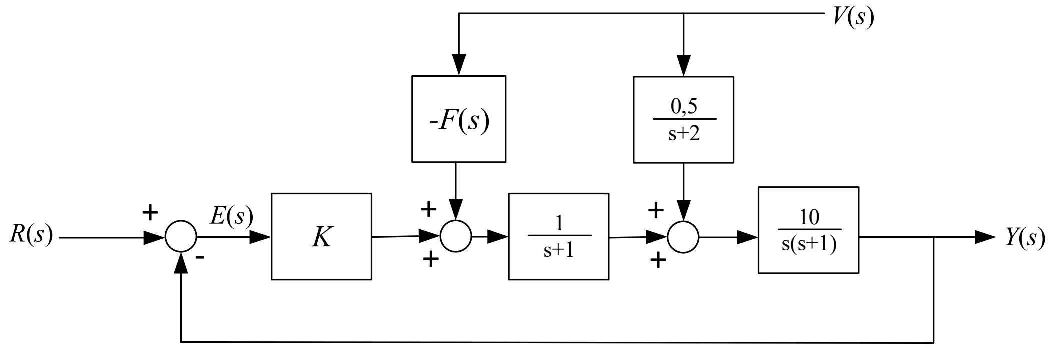
$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t)$ som har det karakteristiska polynomet

$\begin{vmatrix} s+6 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = s(s+6) + 9 = (s+3)^2$

Det slutna systemet har en dubbelpol i -3

Uppgift 8.

Blockschemat nedan visar ett reglersystem, innehållande en återkoppling med en P-regulator och en framkoppling från en mätbar störning v.



a. Bestäm P-regulatorns förstärkning K så att amplitudmarginalen blir 2.5. 2 p

b. Bestäm framkopplingsfiltret $F(s)$ så att störningens inverkan på utsignalen elimineras. 2 p

Lösning

a. Kretsöverföringen

$$L(s) = \frac{10K}{s(s+1)^2}$$

har fasen $-180°$ för $\omega = 1$, vilket innebär att K kan bestämmas ur relationen

$$|L(i \cdot 1)| = \frac{10K}{2} = 1/2.5$$

vilket ger $K = 0.08$.

b. För att inverkan från v skall elimineras helt krävs att

$$\frac{1}{s+1} \cdot F(s) = \frac{0{,}5}{s+2}$$

vilket ger

$$F(s) = 0.5\,\frac{s+1}{s+2}$$

Uppgift 9.

En process har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{2(1-s)}{s(s+1)^2}$$

Bestäm parametrarna för en PD-regulator

$$F(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b}$$

Regulatorn skall ge en fasmarginal på 60° vid överkorsningsfrekvensen $\omega_c = 0{,}4$ rad/s. 3p

Lösning

Vid den önskade överkorsningsfrekvensen gäller arg$G(i\omega_c) = -\pi/2 - 3 \arctan 0{,}4 = -155{,}4°$,så fasen måste lyftas 35,4°.

Om max faslyft $\varphi_{max} = 35{,}4°$ görs vid $\omega = \omega_c$, så ger formelsamlingen att b kan väljas som

$$b = \frac{1 + \sin \varphi_{max}}{1 - \sin \varphi_{max}} \approx 3{,}75$$

Max faslyft sker vid "mittfrekvensen" $\sqrt{b}/T$ som skall vara lika med ω_c, vilket ger $T \approx 4{,}84$.

K_p ges nu av villkoret att kretsöverföringen skall ha förstärkningen 1 vid $\omega = \omega_c$,:

$$|G(i0{,}4)| \cdot K_p \cdot \frac{|1 + i\sqrt{b}|}{|1 - i\sqrt{b}|} = 1 \quad \Rightarrow \quad K_p \approx 0{,}11 \quad ,$$

så att

$$F(s) = 0{,}11 \cdot \frac{1 + 4{,}8s}{1 + 1{,}3s}$$